

Zgodovina pouka matematike od neolitika do digitalne dobe

Mara Cotič

Univerza na Primorskem
mara.cotic@pef.upr.si

Matija Jenko

Univerza na Primorskem
matija.jenko@pef.upr.si

Daniel Doz

Univerza na Primorskem
daniel.doz@pef.upr.si

Amalija Žakelj

Univerza na Primorskem
amalija.zakelj@pef.upr.si

Matematika je ena najstarejših in za človeka najkoristnejših znanosti. Začela se je razvijati v neolitiku in se nato pospešeno razvijala v starih civilizacijah na Kitajskem, v Indiji, Babilonu, Egiptu, stari Grčiji in Rimskem imperiju vse do danes. Vzporedno z matematiko in razvojem družbe se je skozi zgodovino razvijal tudi pouk matematike, ki ga predstavljamo v prispevku. Za matematiko je bilo v začetku število, šele nato so začeli poučevati računske operacije. V 20. stoletju so se na osnovi teoretičnih izhodišč kognitivne in konstruktivistične teorije poučevanja ter učenja uvedle pomembne novosti in zelo spremenile pouk matematike; te so (bile) Brunerjev model usvajanja matematičnih pojmov; taksonomije matematičnih vsebin po Gagneju; sodobni načini poučevanja in učenja (raziskovalni in problemski pouk, izkustveni pouk, aktivni pouk idr.) ter vpeljava obdelave podatkov. Na prehodu iz 20. v 21. stoletje sta osrednje mesto pri pouku matematike prevzeli matematična pismenost in uporaba izobraževalne tehnologije.

Ključne besede: zgodovina, pouk matematike, računanje, matematična pismenost, izobraževalna tehnologija

Zgodovina pouka matematike

Daljna preteklost

Za matematiko je bilo v začetku število. Še danes veliko matematikov misli, da število ni samo zgodovinski začetek matematike, temveč – tudi širše in splošneje gledano – njen najgloblji temelj. Tako njene prve začetke »vidimo« v štetju, v nastanku pojma »abstraktno naravno število«, v izoblikovanju imen in znamenj za števila ter pozneje v prvih korakih k elementarnemu računanju s tako vpeljanimi števili (Devidé 1984).

Spretnosti računanja so poučevali že v najstarejših časih pred našim štetjem. To nam potrjujejo prastari dokumenti, najdeni v hramu boga Baala v Nippuru, na katerih so vtisnjeni simboli števil in računske operacije. Ti doku-

menti segajo v dobo nekaj tisočletij pred našim štetjem. Tudi na staroegipčanskih spomenikih in papirusih najdemo navodila za računske operacije. Egipčani so za računanje uporabljali ploščo z žlebički, imenovano abakus, v katerih so bili pomični kamenčki. Podoben abakus so uporabljali tudi Rimljani in ga uvedli za praktično rabo po vsem svojem imperiju (Koletič 1969; Devidé 1984). Egipčani so imeli zelo razvito tudi geometrijo, in sicer zaradi praktičnih potreb pri merjenju polj ob Nilu in v gradbeništvu. Po vsem, kar danes vemo o staroegipčanski matematiki, kaže, da so jo imeli za empirično znanost. Matematika je deduktivna znanost postala šele v stari Grčiji.

V srednjem veku je ves računski pouk potekal na abakusih. Brez njihove pomoči so zelo težko reševali račune z »velikimi« števili, saj še niso poznali pozicijskega pisanja števil. Pozicijsko pisanje števil oz. indijsko-arabsko zapisovanje števil v desetiškem sestavu je močno vplivalo na razvoj matematike in kulture sploh. Vendar, ne glede na njen napredek, matematike še dolgo niso uvedli v šole kot obvezen učni predmet. V srednjem veku so se v mestih pojavili »računski mojstri«, ki so poučevali spretnost računanja. Najznamenitejši srednjeveški računski mojster je bil Francoz A. Riese (1492–1559). Računstvo v srednjem veku se je poučevalo samo zaradi praktičnih potreb v obrti in trgovini.

V osnovne šole so računski pouk kot obvezen učni predmet uvedli šele proti koncu 17. stoletja. Vse do druge polovice 18. stoletja je imel pouk računstva in geometrije samo eno nalogo: razviti mehanične spretnosti učencev za reševanje praktičnih nalog. Zato je pouk potekal brez razlage in logičnega utemeljevanja (Klopčič in Klopčič 1955).

Šele z razsvetljenstvom so začeli poudarjati tudi formalne cilje in naloge računskega pouka, saj so želeli, da računstvo razvija posamezne psihične funkcije. Zato so si prizadevali za računanje z razumevanjem, kar je v računski pouk prineslo načelo nazornosti in skladno z njim različna didaktična sredstva. Žal pa je kljub vsem tem prizadevanjem šolska praksa v večini primerov ostala le dresura in učenje računskih pravil na pamet. Najvidnejši metodiki v tem obdobju so bili D. Busse, E. Rochow, E. C. Trapp in B. H. Overberg (Tomić 1984).

Preteklost

Smeri, ki je terjala, da mora računski pouk izpolnjevati izobraževalne naloge, se je v pedagoški praksi uveljavila šele z velikim pedagogom in psihologom J. H. Pestalozzijem (1746–1827). Zanj je bil računski pouk resnično izobraževanje in razvijanje mladega človeka ter ne samo dresura. Čeprav je Pestalozzi pretiraval z računskimi vajami v posebnih preglednicah in je zašel v pretirani

računski formalizem, pa mu moramo priznati zasluge, ki jih ima za razvoj računskega pouka. Njegova dela so številne pedagoge (Tillicha, Harnischa, Diesterwega, Grubea) 19. stoletja spodbudila, da so začeli preučevati in razvijati računski pouk ter ga s tem neprenehoma izboljševali. Med Slovenci, ki so začeli vanj vnašati nove ideje, moramo omeniti F. Močnika, ki velja za glavnega reformatorja računskega pouka v osnovnih in srednjih šolah v bivši Avstriji ter preko njenih meja. Močnik je bil pristaš t. i. monografske metode, ki vsako posamezno število prikaže kot individuum v vseh njegovih odnosih, tako da iz tega same po sebi izhajajo posamezne računske operacije. Poleg tega je zasnoval tudi novo pot pri poučevanju geometrije: začel je s fizičnimi telesi, od tega prešel na geometrijska telesa in nato na ploskve, črte ter točke (Močnik 1994). Načela računskega pouka pedagogov 19. stoletja je v veliki meri upošteval pedagog E. Hientschel na začetku 20. stoletja. Njegove računice so bile vrsto let zgled računskega pouka. Vpeljal je koncentrično razporeditev učne vsebine in s tem veliko prispeval k smiselni gradnji učnega načrta, zlasti za aritmetiko.

Od preteklosti k sedanjosti

Veliko prelomnico v poučevanju matematike je na začetku 20. stoletja pomenila konferenca v Meranu (1905). Zbrani znanstveniki so skušali računstvo prilagoditi otrokovim psihofizičnim sposobnostim, upoštevajoč pri tem rezultate mladinske psihologije in eksperimentalne pedagogike. Predvsem so želeli, da naj bi pouk računstva in geometrije razvijal funkcionalno mišljenje, konkretno zaznavanje prostorskih odnosov ter odkrival matematične odnose v naravi, družbi in življenju (Klopčič in Klopčič 1955). Znanstveniki, ki so pomembno vplivali na razvoj matematike v prvi polovici 20. stoletja, so bili V. Prihoda, J. Kühnel in J. Wittmann. Kljub temu da so vložili veliko truda, da bi izboljšali pouk matematike, pa lahko zaključimo, da se je matematični pouk vse do srede 20. stoletja omejeval zgolj na potrebo, da se učencu nudi nepogrešljive instrumente za praktične aktivnosti; to je le pridobivanje prepotrebne tehnike za štiri osnovne računske operacije. Učenci so se torej učili samo »praktične« aritmetike. Geometrija je bila manj pomembna; njen pouk je bil zožen samo na načrtovanje likov, izdelavo modelov teles, računanje obsegov in ploščin likov ter površin in prostornin teles.

Sedanjost (od sredine 20. stoletja do danes)

Leto 1950 je čas, ki označuje začetek velikih sprememb pouka matematike v svetu. Tega leta so znanstveniki, med katerimi so bili psiholog J. Piaget, matematik G. Choquet in pedagog C. Gattegno, formirali komisijo Comission

Internationale pour l'Etude et l'Amelioration de l'Enseignement des Mathematiques (CIEAEM). Veliko so razpravljali o sodobni matematiki in razvojni psihologiji; tako se je porodila ideja o koreniti reformi pouka matematike na vseh stopnjah šolanja.

Po letu 1960 so se začeli v večini držav procesi prenove (ta je bila mednarodnega značaja), v katerih so sodelovali tako matematiki kot psihologi, pedagogi in učitelji (Valenti 1987; Franchi 1992). Pri prenovi pouka matematike so se pojavile različne tendence, ki so bile največkrat neskladne in med seboj divergentne. Ta prenova je potekala v treh fazah: spremembe vsebin, spremembe pristopov poučevanja in učenja ter spoznanje, da niso pomembne samo vsebine in pristopi, ampak predvsem otrok oz. učenec, ki mu so vsebine in pristopi namenjeni.

Do tega spoznanja so prišli v 80. letih najprej v državah zahodne Evrope in Severne Amerike (Valenti 1987; Pellerey 1995).

V prvi fazi so bili prepričani, da je dovolj, če v pouk matematike dodajo samo nove vsebine. Na prehodu iz 19. v 20. stoletje se je namreč razvila nova matematična veja – teorija množic Georga Cantorja (1845–1918), ki je zelo hitro prodrla na večino področij klasične matematike, ne samo s svojo simboliko in terminologijo, temveč tudi s svojimi pogosto značilno novimi metodami. Po celem svetu je teorija množic prodrla tudi v pouk matematike na vseh stopnjah šolanja. Govorilo se je o »novi matematiki« oz. »moderni matematiki« ali *première vogue* (fr.), kot je to imenovala matematičarka Z. Krygowska (Valenti 1987). Devide (1984) ugotavlja, da se je pri vpeljavi novih vsebin v šole nevarno pretiravalo, in to ne samo v prostoru bivše SFRJ, ampak bolj ali manj povsod po svetu, kjer so jajčaste sličice (Eulerjevi diagrami) v barvah preplavile učbenike. Že v prvem razredu so se pojavile množice z logiko, koncept števila je učenec spoznaval kot kardinalnost ekvipolentnih množic, tudi aritmetične operacije so temeljile na operacijah med množicami, geometrija pa je bila vpeljana kot študij topoloških transformacij. V tistem času se je »pozabljalo«, da je tisti del teorije množic, ki ga lahko z uspehom uporabljajo v osemletkah, izjemno elementaren, zahtevnejših vsebin iz teorije množic pa otrok na tej stopnji razvoja ne bi mogel usvojiti.

S kongresom International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) leta 1972, na katerem je R. Thom izzval polemiko s svojim predavanjem Moderna matematika: obstaja?!, se je začela druga faza sprememb pouka matematike. Raziskave, ki so jih v tistem času izvedli v osnovnih šolah po svetu, so pokazale, da so otroci nespretni računarji in slabi reševalci matematičnih problemov, vezanih na konkretne življenjske situacije (Valenti 1987; Franchi 1992). S temi raziskavami so ugotovili, da je bilo naivno in nesmiselno pričako-

Preglednica 1 Brunerjev model usvajanja matematičnih pojmov

Enaktivna (konkretna) raven	1. Zastavitev izhodiščne problemske situacije 2. Analiza izhodiščne problemske situacije 3. Izvedba aktivnosti (igranje situacij, predstavitev s predmeti)
Ikonična (grafična) raven	4. Shematizacija dejavnosti (risba, skica) 5. Izvedba dejavnosti v različnih drugih situacijah 6. Shematizacija dejavnosti s sistematičnimi prikazi (preglednica, kombinatorično drevo, puščični diagram)
Simbolna raven	7. Prikaz dejavnosti v še splošnejši obliki (nastavitev računa za posamezen primer) 8. Posplošitev problema 9. Uporaba razvitega pojma v novi situaciji (razviti pojem deluje kot instrument)

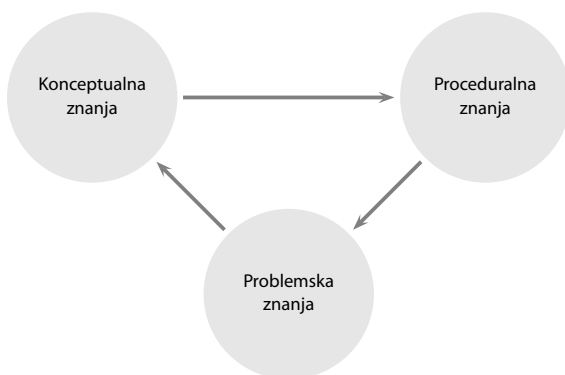
vati, da za izboljšanje pouka matematike zadostuje samo vpeljava sodobnih vsebin, in pri tem pustiti vnmear pristope poučevanja in učenja. Tako so najprej v zahodni Evropi in Severni Ameriki, nekoliko kasneje pa po celem svetu pričeli z novimi pristopi poučevanja in učenja, ki so imeli teoretično oporo v delih psihologov, kot so Piaget, Bruner, Bloom, Galjperin, Gagne idr.

V tej fazi so pri pouku matematike pridobila na pomembnosti načela osebne aktivnosti oz. aktivnega sodelovanja otroka. Postalo je nujno matematične vsebine vpeljati z aktivnostmi, ki so temeljile na otrokovem raziskovanju. Čeprav se je v drugi fazi sprememb pouk matematike izboljšal, saj so prečistili vsebine in uporabljali učencem primerne oblike ter metode, pa se je matematiko učilo kot disciplino, ki je zaprta sama vase (Valenti 1987).

Nekaj najpomembnejših novosti, ki so se vpeljale v tem času predvsem na osnovi teoretičnih izhodišč kognitivne in konstruktivistične teorije poučevanja ter učenja, so: Brunerjev model usvajanja matematičnih pojmov, taksonomije matematičnih vsebin po Gagneju, sodobni načini poučevanja in učenja (raziskovalni in problemski pouk, izkustveni pouk, aktivni pouk ...) ter vpeljava obdelave podatkov.

Brunerjev model usvajanja matematičnih pojmov

Učenec na razredni stopnji pri usvajanju novih pojmov »prehodi« tri ravni (preglednica 1). Enaktivne, ikonične in simbolne ravni ne smemo gledati statično, kot da bi proces učenja pojmov potekal najprej samo enaktivno, nato ikonično in slednjič simbolično. Te različne predstavitevne ravni moramo pojmovati zelo fleksibilno in jih različno vključevati v pouk, lahko si sledijo zaporedno, npr. konkretno enaktivnost prenesemo v sliko in nato sliko opišemo



Slika 1

Razmerja med tipi znanj

ter zapišemo s simboli ter tudi tako, da konkretno enaktivnost takoj prenesemo na simbolno raven. Nadalje lahko po sliki konkretno »operiramo« in obratno, po sliki opišemo potek in ga zapišemo s simboli (Tomić 1984).

Gagnejeva taksonomija

Izhodišče o ravneh in vrstah znanja predstavljajo taksonomije oz. klasifikacije znanja, urejene v hierarhični strukturi. Gagnejeva klasifikacija (1985 v Žakelj 2003) matematično znanje deli na: osnovna in konceptualna znanja (npr. prepoznavanje pojmov na modelih, fleksibilno prehajanje med reprezentacijami pojmov), proceduralna znanja (rutinska proceduralna znanja, kompleksna proceduralna znanja) in problemska znanja. S problemskim znanjem so povezani raziskovanje, odkrivanje, poznavanje in izbira strategij pri reševanju problemov ter aplikativna znanja.

Znanja so med sabo povezana. Kot navaja Anna Sfard (1991), sta osnovno in konceptualno ter proceduralno znanje temeljni sestavini matematičnega znanja, ki ju uporabljamo pri reševanju problemov. Bethany Rittle-Johnson in Martha Wagner Alibali (1999) posebej poudarjata, da sta za reševanje problemov pomembni obe vrsti znanja, in izpostavljata, da samo proceduralno znanje, brez konceptualnega razumevanja, in obratno, ni dovolj za reševanje problemov ter da se matematične kompetence med drugim kažejo v sposobnosti povezovanja in uporabi temeljnih matematičnih pojmov ter postopkov pri reševanju problemov. Povezavo med različnimi tipi znanj nazorno prikazuje slika 1.

Učenje z raziskovanjem

Raziskovanje pri pouku je hkrati sredstvo, cilj, proces in produkt (Krnal 2007). Linda Barron in Brigid Darling Hadmond (2010 v Skvarč in Bačnik 2011) učenje

opišeta z raziskovanjem kot: projektno zasnovano učenje (pri čemer termin projekt predstavlja širši sklop učnih izkušenj), problemsko učenje in učenje skozi načrtovanje. V priporočilih za učenje z raziskovanjem sta izpostavili potrebo po uvajanju prehoda od deduktivnega k induktivnem pristopu pri poučevanju, ki, ob ustreznem učiteljevem vodenju, daje več prostora opazovanju, eksperimentiranju in samoizgradnji znanja učencev.

Evropska komisija (European Commission 2007) učenje z raziskovanjem opredeljuje kot kombinacijo teoretičnega znanja in razumevanja ter praktičnega znanja, spretnosti in veščin. Pristop temelji na več načelih: neposredna izkušnja je pot do razumevanja; učenci morajo raziskovalno vprašanje ali problem razumeti, zato ga morajo tudi sami opredeliti, določiti, usvojiti; pri učenju z raziskovanjem razvijajo procesna znanja (spretnosti, veščine); učenje z raziskovanjem ni le manipuliranje s snovmi, pripomočki, idr., je predvsem miselna dejavnost; uporaba sekundarnih virov dopolnjuje neposredno izkušnjo; raziskovanje je sodelovanje, je delo v skupini.

Pri učenju z raziskovanjem učenci: prepoznajo probleme, kritično presojajo/vrednotijo, razlikujejo med alternativami, načrtujejo raziskave, raziskujejo domneve/hipoteze, iščejo informacije, konstruirajo modele, razpravljajo s sošolci, oblikujejo koherentne argumente, zaključke (European Commission 2007).

V okviru poučevanja matematike z raziskovanjem je problem več kot zgolj določena naloga, vaja ali dejavnost. Problem je odprt v smislu, da zahteva aktivno udeležbo učencev pri eksperimentiranju, postavljanju hipotez glede možnih rešitev, sporočanju hipotez in možnih strategij reševanja ter morda tudi pri postavljanju dodatnih vprašanj, na katera bo treba odgovoriti med procesom reševanja problema.

Primer izziva za raziskovalno učenje: če vse tri dolžine stranic trikotnika trikrat povečamo, koliko bo ploščina povečanega trikotnika v primerjavi s ploščino prvotnega trikotnika? (Antoliš idr. 2019)

Pristopi reševanja in raziskovanja problema so odvisni od predznanja. Učenci lahko ustvarijo veliko število trikotnikov, jih povečajo, zberejo rezultate in formulirajo hipoteze o povečanju ploščine. Nadalje lahko raziščejo posebne primere (npr. pravokotne trikotnike) in algebrsko izpeljejo hipotezo o tem, koliko večja bo povečana ploščina. Različne strategije reševanja lahko učenci med sabo primerjajo in o njih razpravljajo. Na osnovi izkušenj, ki so jih pridobili, zgradijo lastno znanje o preučevanem problemu.

Goldin in Nina Shteingold (2001) navajata različne razloge za učenje matematike skozi reševanje in raziskovanje problemov: pri reševanju in raziskovanju problemov povezujemo različne matematične vsebine; razvijamo višje

ravni razmišljanja, višje kognitivne procese; reševanje in raziskovanje problemov prispeva h konceptualnemu razvoju in k razumevanju matematičnih pojmov; učitelj ima priložnost za vpogled v znanje, razumevanje in tudi učne težave učencev; skozi proces reševanja problemov se razvijajo različne strategije (npr. konstrukcije, računski algoritmi, urejanje podatkov, tabeliranje, risanje diagramov idr.); reševanje in raziskovanje problemov zahtevata sprejemanje odločitev ter spodbujata sodelovanje učencev in diskurz, ki se opira na razumsko, logično razčlenjevanje; reševanje in raziskovanje problemov se povezuje z drugimi pomembnimi (matematičnimi) idejami in spodbuja ustvarjalnost.

Aktivno učenje

Učenje in poučevanje naj ne bi bila le posredovanje matematičnih dejstev ter postopkov, ampak dejavno učenje, učenje učenja. Vsako učenje zagotovo zahteva določen miselni napor, četudi gre le za memoriranje dejstev. V tem smislu bi lahko rekli, da je vsako učenje dejavno. Seveda pa učenje izoliranih informacij brez oblikovanja novih pojmovnih povezav ne vodi do trajnega in kakovostnega znanja. Tudi ne gre enačiti miselne dejavnosti z dejavnostmi, pri katerih učenci uporabljajo didaktični material. Učenje in poučevanje morata zagotoviti interakcijo med konkretno ter miselno dejavnostjo, ki privede do povezav. S pojmom »aktivno učenje« razumemo, da je to tista mentalna dejavnost, ki pripelje do povezav med miselno in konkretno dejavnostjo.

Po Deeju Finku (1999 v Lebarič, Kobal in Kolenc 2002) aktivno učenje temelji na logičnem sklepanju in empiričnem preverjanju, opredeljujeta pa ga dve ravni: raven dialoga in raven izkušenj. Dejavno učenje spodbuja razvoj matematičnega razmišljanja (ustvarjalno, kritično, analitično in sistemsko).

Dejavnosti aktivnega učenja matematike so raznolike: modeliranje (piskati matematično predstavitev za nematematični objekt ali proces); iskanje analogij (npr. trikotniku v ravnini je analogen trirob v prostoru); navajanje/iskanje primerov in nasprotnih primerov; samostojno reševanje odprtih problemov (uvid v problemsko situacijo in postavljanje vprašanj); eksperimentiranje, izvajanje meritev v učilnici ali naravi; zbiranje podatkov; reflektiranje matematičnih znanj ob uporabi modelov; predstavitev pojmov z diagrami, modeli, risbami; ocenjevanje; približno računanje; samostojno iskanje virov; iskanje podobnosti, razlik ter povezav med pojmi in dejstvi. Prav tako so raznolike tudi oblike dela. Socialni psihologi (Gilly, Blaye in Roux 1988) zelo poudarjajo pomen sodelovanja, saj se kognitivne sposobnosti razvijejo tudi v socialni interakciji.

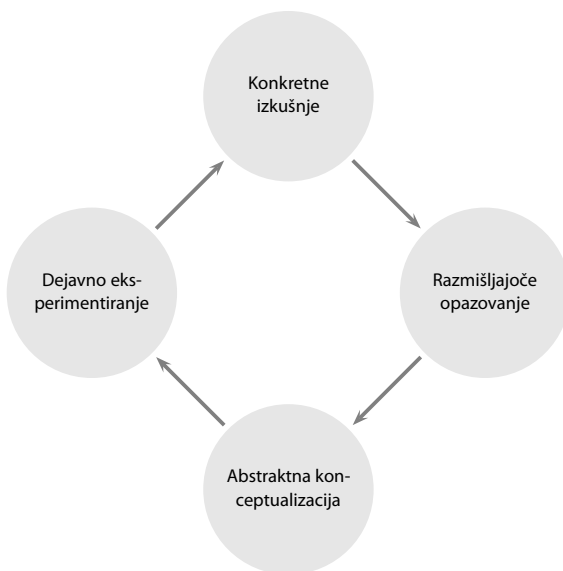
Velja pa omeniti še eno dimenzijo, ki je nujna za to, da je učenje lahko aktivno – to je čas. Če naj bodo učenci dejavni pri konstrukciji znanja, mo-

rajo imeti za to čas. Le če imajo dovolj časa, lahko samostojno razmišljajo, eksperimentirajo, pri reševanju razvijajo lastne pristope, razpravljajo o rešitvah z drugimi učenci ali učiteljem ter utemeljijo odgovore sebi in drugim. Če učenci niso obremenjeni s časom, je lahko njihova pozornost usmerjena tudi v pristope pri reševanju, ne le v rezultate. V samem procesu učenja se lažje izmenjujejo situacije – iskanje strategij, razprave, utemeljevanje, izmenjava mnenj –, le če je dovolj časa. Postopno nadomeščanje ur matematičnih dejstev z ustvarjalnimi urami je žal dolgotrajen proces tako s stališča učiteljeve preobrazbe kot s stališča učnih rezultatov.

Izkustveno učenje

Izkustveno učenje je metoda učenja, ki skuša neposredno izkušnjo (doživljaj), opazovanje (percepcijo), spoznavanje (kognicijo) in ravnanje (akcijo) povezati v neločljivo celoto. Ne omejuje se zgolj na posredovanje simbolov – abstraktnega znanja pojmov in zakonitosti –, temveč v učenje nenehno vpleta izkušnje udeležencev (Marentič Požarnik 1996).

Da bo učenec lahko res ponotranjil na novo usvojene pojme in z njimi nadomestil intuitivne predstave, mu je treba zagotoviti različne situacije, v katerih bo to novo znanje lahko uporabil in ga potrdil. Izkustveno učenje mu lahko pomaga pri postopnem usvajanju in graditvi pojmovnih predstav, od konkretnih izkušenj do abstraktnega pojma. Ima pomembno vlogo, zlasti za učence, katerih izhodišče pri spoznavanju so čutila, zbiranje, merjenje in opazovanje.



Slika 2

Krog izkustvenega učenja
po Kolbu (prirejeno po
Marentič Požarnik 1996)

Obdelava podatkov (statistika, verjetnost, kombinatorika)

Ob koncu 20. stoletja so se v slovenski učni načrt za matematiko za osnovno šolo prvič vključile vsebine obdelave podatkov in statistike (statistika, verjetnost, kombinatorika). Poglavitni razlogi za uvajanje vsebin iz obdelave podatkov so naslednji:

- *računska pismenost* (preglednice, diagrami, ankete so del našega vsakdana (časopisi, učbeniki, računalniško predstavljeni podatki idr.));
- *potrebe po poznavanju orodij za komuniciranje* (dandanes pri sporočanju redno uporabljamo grafične prikaze, preglednice idr.);
- *potreba po sposobnosti kritične presoje predstavljenih podatkov* (če ne razumemo tehnik prikazovanja podatkov in če jih ne znamo kritično presojati, smo zelo lahek plen za manipuliranje (reklame, volitve idr.));
- *dostopnost računskih orodij za obdelavo podatkov*.

V prvih letih šolanja še ne gre za »pravo« učenje obdelave podatkov, ampak za pridobivanje prvih znanj le intuitivno, na konkretni ravni. S tem učence postopoma pripravljamo na abstraktno razumevanje.

Obdelava podatkov kot matematična vsebina v zgodnjih letih šolanja prav gotovo ni sama sebi namen. Med drugim povezuje matematiko z drugimi vsebinami (spoznavanjem okolja, slovenskim jezikom idr.) in s tem sooblikuje podobo celostnega pouka (Cotič in Hodnik 1995). Širi matematično obzorje, razvija matematično mišljenje in spodbuja učenčev kritično razmišljanje o svetu, v katerem živi, oz. po Cockcroftu (1982, 8): »Te vsebine niso zgolj tehnične narave, kamor bi spadalo spoznavanje različnih metod obdelave podatkov, sistematično prikazovanje podatkov idr., ampak jih odlikujeta negotovost in spremenljivost ter nam omogočajo, da se pri raziskovanju množice negotovih in spremenljivih podatkov odločamo sami.« Učencem torej nudijo možnost, da se za postopke odkrivanja in reševanja le-teh odločajo sami. Na začetku šolanja je statistika le uvod v predstavitve in analize podatkov; predstavlja torej dejavnost, ki je v svetu, polnem informacij, nujna. Vsebine iz statistike morajo biti učencem predstavljene že na elementarni stopnji šolanja, saj tako pomagajo postopno in počasi razvijati njihov kritičen odnos do »numeričnih informacij«, ki jih mediji predstavljajo (Howson in Kahane 1986). Statistika omogoča tudi povezavo z drugimi predmeti, npr. s spoznavanjem okolja, in pridobivanje veščin grafičnega ponazarjanja tako pri matematiki kot pri drugih predmetih.

Temeljni cilj poučevanja kombinatorike je razvijati učenčeve logično mišljenje in sistematičen pristop pri reševanju kombinatoričnih situacij ter avto-

nomnost njegovega mišljenja. Seveda na začetku šolanja ne moremo govoriti o pouku kombinatorike kot matematične discipline, ampak učenci rešujejo preproste kombinatorične situacije z neposredno izkušnjo (igro) na konkretni ravni. Lahko rečemo, da učenje teh vsebin v kasnejših letih šolanja (v srednji šoli) učencu razkrije »srce« matematike (kombinatorični koncepti se izražajo z jezikom teorije množic, rezultati in metode iz kombinatorike so zelo uporabni ter koristni tudi na drugih matematičnih področjih, prav posebej v teoriji verjetnosti idr.).

Kaj pa vsebine iz verjetnosti? Kot je zapisano v publikaciji, ki jo je izdal Unesco (1972, 96): »Samo deterministično mišljenje ni več dovolj za razumevanje nekaterih znanosti; nedeterministične sheme razmišljanja so vedno bolj potrebne in prisotne, na primer v genetiki, biologiji, fiziki, ekonomiji ...« Verjetnost se danes uporablja tudi na področjih, ki so blizu človekovega vsakdana: v meteorologiji (vremenske napovedi), pri volitvah, v zavarovalništvu idr. Današnji človek živi v hitro spreminjajočem se svetu in se mora vedno pogosteje soočiti z novimi ter negotovimi situacijami. Zato je potrebna »abeceda« verjetnosti, ki zahteva poseben način mišljenja, ki je tuj determinističnemu načinu, prevladujočemu v naših šolah. Tako tudi odrasli, ki so bili deležni takšne šolske izobrazbe, pri dojemljanju osnovnih in temeljnih pojmov iz verjetnosti velikokrat naletijo na težave, saj tu dvovalentna logika (narobe/prav, je res/ni res) odpove. Didaktik matematike E. Fischbein, ki je bil eden največjih svetovnih ekspertov na področju didaktike verjetnosti v osnovni šoli, je že leta 1970 v Izraelu izvedel raziskavo o primernosti uvajanja verjetnosti že na razredno stopnjo pouka matematike in prišel do zaključka, da učenec na razredni stopnji na intuitivni ravni dobro sprejema in usvaja najelementarnejše koncepte verjetnosti. Po opravljeni raziskavi je zapisal (Fischbein 1984, 41):

Z raziskavo smo potrdili našo hipotezo, da morajo biti koncepti in tehnike verjetnosti in statistike vpeljane že v pouk matematike na razredni stopnji, ne pa šele na predmetni stopnji ali celo v srednji šoli, ko je mišljenje človeka že bolj oblikovano. Če hočemo, da bo človek razvil razmišljanje, ki se bistveno razlikuje od determinističnih shem razmišljanja, moramo začeti učiti statistiko, kombinatoriko in verjetnost (obdelavo podatkov) na stopnji konkretnih operacij (7–11 let).

Od sedanjosti k prihodnosti

Matematična pismenost

V tretji fazi sprememb pouka matematike (od leta 1990 naprej) se srečamo s spoznanji, da je, posebej pri učenčevih začetnih korakih v svet matematike,

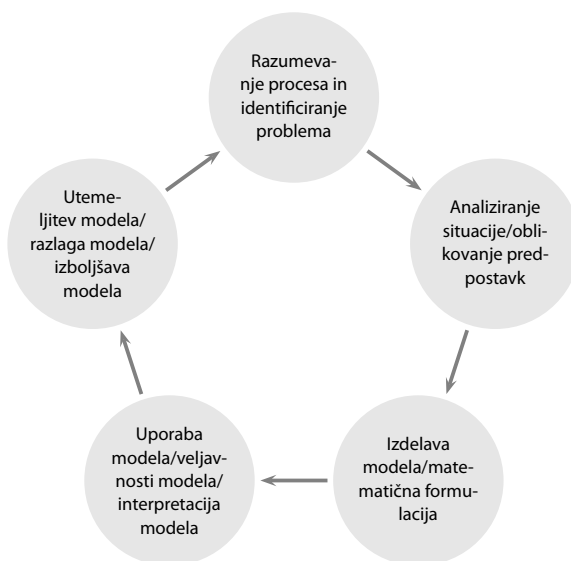
nujna nepretrgana povezava s poukom drugih disciplin. Potreba in vrednost poučevanja ter učenja matematike ni namreč samo v usvajanju njenih vsebin in metod, ampak je bistveni razlog za tega poučevanje in učenje njena matematika pri razvoju celovite osebnosti učenca. Hkrati pa je matematika koristno orodje v življenju vsakega človeka, tako odraslega kot otroka in mladostnika.

Vezano na ta spoznanja se je sredi 20. stoletja v kurikularnih dokumentih začel pojavljati pojem matematična pismenost kot analogija bralne pismenosti, in sicer kot smer matematičnega izobraževanja, ki bolj kot poznavanje matematičnih vsebin poudarja usposobljenost izvajanja matematičnih procesov (Jablunka 2015). Predvsem v kontekstu izobraževanja odraslih je nekoliko kasneje nastal pojem *numeracy* (angl.), ki je sprva pomenil nekaj takega kot »znanstvena pismenost«. V naslednjih desetletjih sta oba pojma dobila drugačen pridih: matematična pismenost danes pomeni usposobljenost za uporabo matematike pri lastnem poklicnem delu, v socialnem okolju in v nadaljnjem izobraževanju.

To poudarjajo tudi razne inačice definicije matematične pismenosti v raziskavah Programme for International Student Assessment – PISA. Definicija iz leta 2022 (Pedagoški Inštitut 2023, 15) se glasi:

Matematična pismenost je opredeljena kot spretnost matematičnega sklepanja ter preoblikovanja, uporabe in interpretacije matematike za reševanje problemov v različnih življenjskih situacijah. Vključuje koncepte, postopke, dejstva in orodja za opisovanje, pojasnjevanje ter predvidevanje pojavov. Posameznikom pomaga razumeti vlogo, ki jo ima matematika v svetu, pomaga jim utemeljeno sklepati in sprejemati odločitve, ki jih potrebujejo kot konstruktivni, zavzeti in razmišljujoči državljani 21. stoletja.

Matematične pismenosti ne gre enačiti s šolsko matematiko (Gardiner 2006), ki je na višjih stopnjah šolanja širša in obsežnejša. Velik del šolske matematike, pa naj gre za pojme, postopke, procese ali strategije, je uporaben v vsakdanjem ali poklicnem okolju. Poleg tega uporaba matematike terja tako določena *matematična znanja* kot tudi *spretnosti* in *procese*. Za učinkovito uporabo lastnega matematičnega znanja je npr. pomembno znati zbirati in obdelovati podatke, oblikovati, sporočati in sprejemati matematične informacije, poznati ustrezna tehnološka orodja ter še bi lahko naštevali. Ena pomembnejših zahtev matematične pismenosti v 21. stoletju pa je zmožnost matematičnega modeliranja.

**Slika 3**

Shema procesa matematičnega modeliranja

Modeliranje kot del matematične pismenosti

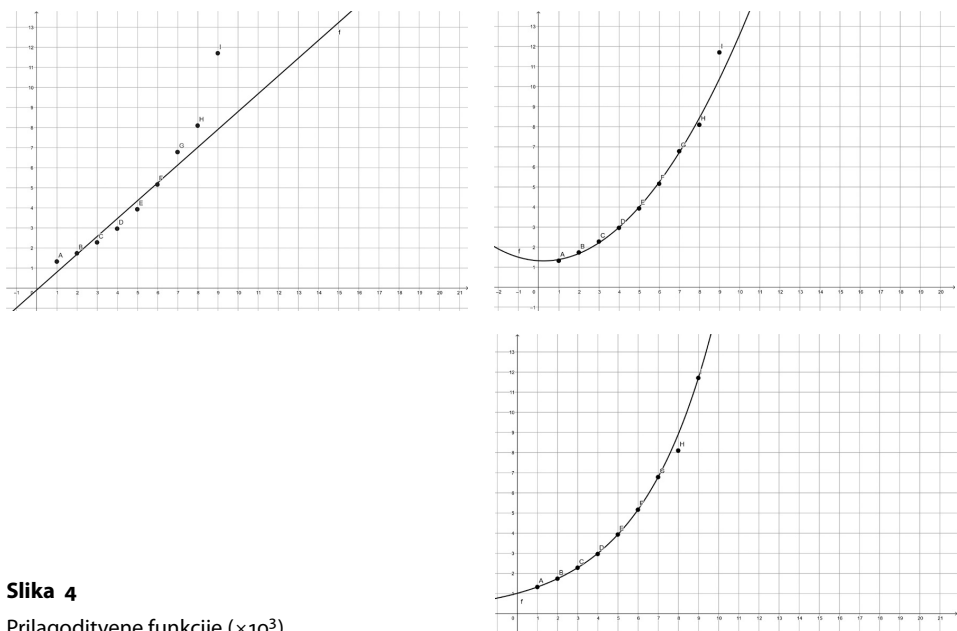
Matematično modeliranje je proces matematizacije. V izbrane situacije vnašamo načela in načela matematike ter tako prevajamo realnost v matematično okolje. Npr., rast prebivalstva, ki je eksponentna, modeliramo z eksponentno funkcijo. Matematični model za met krogle je poševni met. Znižanje vrednosti dobrin na trgu (npr., s starostjo se vrednosti avtomobilov, stanovanj znižujejo idr.) lahko predstavimo z eksponentnim pojemanjem, razmnoževanje bakterij modeliramo z eksponentno rastjo. Modeliranje predpostavlja poznavanje modeliranega pojava (npr. nekega fizikalnega zakona), matematičnih orodij in tehnik modeliranja ter kritičnost pri uporabi modelov (Žakelj 2010). Matematično modeliranje je ciklični proces, ki sestoji iz več korakov. Faze procesa matematičnega modeliranja prikazuje slika 3.

Navajamo primer empiričnega modeliranja, pri katerem nas zanima, kako se s časom spreminja število bakterij v nekem vzorcu. Določimo nekaj primerov prilagoditvenih funkcij, ki lahko modelirajo dane podatke (npr. linearno, kvadratno in potenčno funkcijo) (preglednica 2 in slika 4 na strani 566). Primerjajmo modele med seboj glede na prileganje krivulje točkam v koordinatnem sistemu. Kaj lahko na podlagi podatkov in prilagoditvenih funkcij sklepamo o številu bakterij v času? Kako bi lahko preverili natančnost izbranega modela?

Če primerjamo modelne funkcij med seboj glede na prileganje njihovih grafov empirično dobljenim podatkom, lahko rečemo, da so na danem ob-

Preglednica 2 Populacija bakterij

Čas (ure)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Število bakterij ($\times 10^3$)	1,314	1,727	2,270	2,954	3,921	5,154	6,773	8,092	11,700

**Slika 4**Prilagoditvene funkcije ($\times 10^3$)

močju vsi modeli primerni, pri čemer sta nekoliko natančnejša modela kvadratne in eksponentne funkcije. Za izbiro najprimernejše modelne funkcije moramo upoštevati kontekst. Brez upoštevanja konteksta (realistične situacije) med zadnjima dvema ne moremo izbrati primernejše.

Ob upoštevanju konteksta in dobljenih podatkov lahko oblikujemo sklep, da število bakterij v prvih urah naraste počasi, nato eksplozivno hitreje. To je mogoče ugotoviti z opazovanjem razlik med vrednostmi v prvih letih (majhne razlike na začetku, velike razlike na koncu) ali z opazovanjem strmine grafov modelnih funkcij (naraščajoče). Tako kot najrealističnejši ostane model eksponentne funkcije: $f(x) = e^{0,2732x}$.

Z didaktičnega vidika proces modeliranja pomeni reflektiranje matematičnih znanj. Npr., pri modeliranju linearne zveze med količinama reflektiramo linearno funkcijo, pri modeliranju eksponentnega pojemanja eksponentno funkcijo. Modeliranje ustvarja tudi priložnosti za učenje postavljanja predpostavk in posploševanja.

Vendar se je pri prenosu rešitev matematičnega problema v realni svet treba zavedati omejitev modela in pogojev njegovega nastajanja. V tem kon-

tekstu je treba razviti kritičen odnos do vrednotenja rezultatov. Pogosto je interpretacija rešitev z vidika realne situacije zelo zahtevna, včasih zahtevnejša kot interpretacija z vidika matematike.

Izobraževalna tehnologija

V 21. stoletju se učni proces nasploh in pouk matematike spreminjata tudi zaradi vse pogostejše uporabe izobraževalne tehnologije. Smiselna in namen-ska uporaba izobraževalne tehnologije pri pouku lahko izboljša učenje. Po mnenju Alison Clark-Wilson, Ornelle Robutti in Thomasa (2020) ima uporaba digitalnih tehnologij pri pouku matematike dve glavni funkciji: (1) podporo organizaciji učiteljevega dela (npr. izdelava učnih gradiv, formativno in sumativno ocenjevanje učencev ipd.) ter (2) podporo novim načinom izvajanja in predstavljanja matematike. Uporaba digitalnih tehnologij in virov v učnem procesu omogoča izdelavo bogatih učnih okolij z uporabo različnih digitalnih gradiv ter digitalnih podpornih orodij, apletov, animacij in simulacij; podpira različne pristope k poučevanju, kot so modeliranje, simulacija, eksperimentiranje in raziskovanje, pa tudi reševanje matematičnih problemov in avtentičnih nalog (Klančar, Cotič in Žakelj 2019). Poleg tega Rose Mary Zbiek (2003) poudarja pomen dobro premišljene zasnove in didaktično ustrezne uporabe digitalnih tehnologij v procesu poučevanja ter učenja matematike, zlasti z vidika razvijanja matematične intuicije, razumevanja matematičnih konceptov, raziskovanja odnosov, izdelovanja natančnih grafičnih predstavitev, postavljanja in dokazovanja domnev, uporabe različnih strategij reševanja problemov itd.

Vendar pa številni raziskovalci opozarjajo na pasti in svetujejo previdnost pri uporabi izobraževalne tehnologije pri pouku. Delia Hillmayr idr. (2020) ter Olga Viberg, Grönlund in Annika Andersson (2020) poudarjajo, da je smiselno upoštevati, da se digitalna orodja uporabljajo kot dodatek k drugim učnim metodam in ne kot nadomestilo, tako pri načrtovanju programa usposabljanja učiteljev kot pri izvajanju programa.

Prihodnost

Nehvaležno je napovedovati, kaj vse nas čaka v prihodnosti, a vendar se moramo zavedati, da gre pri učenju in poučevanju matematike za izgradnjo matematične kompetence in matematične pismenosti. Zagotovo je prišel čas vse večje digitalizacije, ki pri poučevanju in učenju matematike predstavlja izziv ter spremembe. Ob tem želimo poudariti, da se moramo najprej usmerjati v pridobivanje osnovnih digitalnih kompetenc, nato pa v pridobivanje kompetenc didaktične rabe informacijsko-komunikacijske tehnologije. Menimo, da je treba digitalno rabo temeljito preučiti in postaviti temelje za na-

daljnje delo. V današnjem in prihajajočem digitalnem svetu čaka didaktike matematike veliko dela, saj se nenehno pojavljajo spremembe v načinu pouka matematike. Hkrati pa moramo paziti, da jih bomo smiselno in v pravi meri vpeljevali, da ne bi ob preveliki vnemi pozabili na matematiko samo. Le na ta način ne bomo povzročili ne pedagoške in ne strokovne škode.

Sklep

Skozi zgodovino so se razvijali in izpopolnjevali tehnični ter tehnološki pripomočki, ki so vplivali tudi na učenje in poučevanje matematike – pred didaktiko matematike so se postavljali izzivi, ta pa je skušala iskati optimalne rešitve. Dogajale so se nezveznosti, ki so jih nekateri nekritično vpeljevali ob kaki tehnični ali tehnološki novosti, pogosto pa se je izkazalo, da taka »prehitavanja« prinesejo veliko več škode kot koristi. Ker je matematika nastala in se razvijala iz vsakdanjih potreb človeka, ki je v njej iskal strategije reševanja zagat, v katerih se je znašel, mora to prvobitno potrebo po matematiki začutiti tudi učenec, da bo uvidel njen smisel. Vsako, še tako imenitno tehnološko čudo ne more nadomestiti osnovnega logičnega razumevanja matematike, postane lahko le koristen pripomoček pri uporabi matematike za reševanje najrazličnejših problemov.

Literatura

- Antoliš, S., J. Axelsen, M. Bašić, R. Bos, K. Cafuta, A. Copic in G. R. Dolinar. 2019. *MERIA scenariji in moduli*. Prevedli K. Cafuta, S. Praprotnik in M. Suban. Ljubljana: Zavod Republike Slovenije za šolstvo.
- Barron, B., in L. Darling-Hammond. 2010. »Prospects and Challenges for Inquiry-Based Approaches to Learning.« V *The Nature of Learning*, uredili H. Dumont, D. Istance in F. Benavides, 199–225. Pariz: OECD.
- Clark-Wilson, A., O. Robutti in M. Thomas. 2020. »Teaching with Digital Technology.« *ZDM Mathematics Education* 52 (3): 1223–1242.
- Cockcroft, W. H. 1982. *Mathematics Counts*. London: Her Majesty's Stationery Office.
- Cotič, M., in T. Hodnik. 1995. »O pouku matematike na začetku šolanja v osnovni šoli.« *Matematika v šoli* 3 (3): 143–157.
- Dee Fink, L. 1999. »Active Learning.« <http://honolulu.hawaii.edu/intranet/committees/FacDevCom/guidebk/teachtip/active.htm>.
- Devidé, V. 1984. *Matematika skozi kulture in epohe*. Prevedla T. Bohte. Ljubljana: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije.
- European Commission. 2007. *Science Education Now: A Renewed Pedagogy for the Future of Europe*. Bruselj: European Commission.
- Fischbein, E. 1984. *L'insegnamento della probabilita nella scuola elementare*. Brescia: Editrice la Scuola Brescia.

- Franchi, E. 1992. *La matematica nella scuola elementare*. Brescia: La Scuola.
- Gagne, R. M. 1985. *The conditions of Learning and Theory of Instruction*. 4. izd. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Gardiner, A. 2004. *What is Mathematical Literacy?* Birmingham: University of Birmingham.
- Gilly, M., A. Blaye in J. P. Roux. 1988. »Elaboration de constructions cognitives individuelles en situations socio-cognitives de resolutions de problemes.« V *Psicologia social del desarrollo cognitivo*, uredila G. Mugn in J. A. Perez, 139–164. Barcelona: Anthopos.
- Goldin, G., in N. Shteingold. 2001. »Systems of Representations and the Development of Mathematical Concepts.« V *The Roles of Representation in School Mathematics*, uredila A. Cuoco in F. R. Curcio, 1–23. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Hillmayr, D., L. Ziernwald, F. Reinhold, S. I. Hofer in K. M. Reiss. 2020. »The Potential of Digital Tools to Enhance Mathematics and Science Learning in Secondary Schools.« *Computers and Education* 153:103897.
- Howson, G., in J. P. Kahane. 1986. *School Mathematics in the 1990s*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Jablonka, E. 2015. »The Evolvement of Numeracy and Mathematical Literacy Curricula and the Construction of Hierarchies of Numerate or Mathematically Literate Subjects.« *ZDM Mathematics Education* 47 (4): 599–609.
- Klančar, A., M. Cotič in A. Žakelj. 2019. *Učenje in poučevanje geometrije z uporabo informacijsko-komunikacijske tehnologije v osnovni šoli*. Koper: Založba Univerze na Primorskem.
- Klopčič, M., in R. Klopčič. 1955. *Metodika I*. Ljubljana: Zveza pedagoških društev.
- Koletić, M. 1969. *Metodika nastavne aritmetike*. Zagreb: Pedagoško knjižni zbor.
- Krnel, D. 2007. »Pouk z raziskovanjem.« *Naravoslovna solnica* 11 (3): 8–11.
- Lebarič, N., D. Kobal in J. Kolenc. 2002. »Motivacija za učenje in samopodoba.« *Psihološka obzorja* 11 (3): 23–38.
- Marentič Požarnik, B. 1996. »Raznosterost sposobnosti: izziv za izobraževanje.« *Vzgoja in izobraževanje* 27 (2): 56–57.
- Močnik, F. 1994. *Računica za obče ljudske šole*. Ljubljana: Jutro.
- Pedagoški inštitut. 2023. *Program mednarodne primerjave dosežkov učencev in učenk: PISA 2022*. Uredili K. Šterman Ivančič in A. Mlekuž. Ljubljana: Pedagoški inštitut.
- Pellerey, M. 1995. *L'insegnamento della matematica*. Milano: Fabbri.
- Rittle-Johnson, B., in M. Wagner Alibali. 1999. »Conceptual and Procedural Knowledge of Mathematics: Does One Lead to the Other?« *Journal of Educational Psychology* 91 (1): 175–189.
- Sfard, A. 1991. »On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin.« *Educational Studies in Mathematics* 22 (1): 1–36.

- Skvarč, M., in A. Bačnik. 2011. »Raziskovalno eksperimentalno učenje kot imperativ sodobnega pouka naravoslovnih predmetov.« *Vzgoja in izobraževanje* 43 (6): 12–18.
- Tomič, A. 1984. »Teorija in praksa matematičnega pouka v nižjih razredih osnovne šole.« Doktorska disertacija, Univerza v Ljubljani.
- Unesco. 1972. *Tendenze attuali dell'insegnamento della matematica*. Torino: Società Editrice Internazionale.
- Valenti, E. 1987. *La matematica nella nuova scuola elementare*. Firenze: Le Monnier.
- Viberg, O., Å. Grönlund in A. Andersson. 2020. »Integrating Digital Technology in Mathematics Education: A Swedish Case Study.« *Interactive Learning Environments* 31 (5): 223–243.
- Zbiek, R. M. 2003. »Using Technology to Foster Mathematical Meaning Through Problem Solving.« V *Teaching Mathematics Through Problem Solving*, uredila H. L. Schoen in R. I. Charles, 93–104. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Žakelj, A. 2003. *Kako poučevati matematiko: teoretična zasnova modela in njegova didaktična izpeljava*. Ljubljana: Zavod Republike Slovenije za šolstvo.
- . 2010. »Raznovrstnost pristopov k učenju in poučevanju matematike.« V *Matematika, posodobitve pouka v gimnazijski praksi*, uredili S. Kmetič in M. Sirnik, 15–77. Ljubljana: Zavod Republike Slovenije za šolstvo.

Mathematics Teaching from the Neolithic to the Digital Age

Mathematics is one of the oldest and most useful sciences for humanity. It began to develop in the Neolithic period and then accelerated in ancient civilizations in China, India, Babylon, Egypt, Ancient Greece, and the Roman Empire, right up to the present day. In parallel with mathematics, and with the development of societies and sciences of various kinds, mathematics education, which we present in this paper, has also developed throughout history. For mathematics, the beginning was about numbers, and only then did people begin first to discover and later teach calculating operations. In the twentieth century, based on the theoretical foundations of cognitive and constructivist theories of teaching and learning, important innovations were introduced, among which are Bruner's model of the acquisition of mathematical concepts; Gagné's taxonomies of mathematical content; modern ways of teaching and learning (exploratory and problem-based learning, experiential learning, active learning, etc.); and the introduction of data processing. At the turn of the twenty-first century, mathematical literacy and the use of educational technology took centre stage in mathematics education.

Keywords: history, mathematics education, numeracy, mathematical literacy, educational technology