

Učenje in poučevanje evklidske geometrije: nekoč, danes in jutri

Daniel Doz

Univerza na Primorskem

daniel.doz@pef.upr.si

Darjo Felda

Univerza na Primorskem

darjo.felda@pef.upr.si

Mara Cotič

Univerza na Primorskem

mara.cotic@pef.upr.si

Učenje in poučevanje geometrije sta pomemben del pouka matematike, saj pripomore k razvoju formalnega dokazovanja in utemeljevanja ter boljše reprezentacije resničnosti. Skozi čas so se pojavili različni modeli poučevanja in učenja geometrije, med katerimi je najbolj poznan model zakoncev van Hiele, ki se danes še vedno uporablja v mnogih državah. Poleg tradicionalnega učenja in poučevanja geometrije se je v zadnjih desetletjih pojavilo veliko zanimanje za programsko opremo dinamične geometrije, ki se pogosto uporablja pri pouku geometrije v različnih šolah. Čeprav informacijsko-komunikacijska tehnologija pripomore k boljšemu razumevanju geometrijskih pojmov, je znanje, ki ga pridobijo učenci, pogosto kratkotrajno. V ta namen predlagamo kombinirani način učenja in poučevanja geometrije, ki temelji na treh predpostavkah: (1) formalnemu dokazovanju in utemeljevanju, (2) tradicionalnih konstrukcijah z ravnilom in šestilom ter (3) konstrukcijah s pomočjo informacijsko-komunikacijske tehnologije.

Ključne besede: geometrija, učenje, van Hiele, model, dinamična geometrija

Uvod

Geometrija je ena najzanimivejših in najzabavnejših vej matematike (Bayrak, Yüce in Yüce 2014), s katero se srečujemo vsakodnevno (Graumann 2011) in ki je pomembna za razvoj človeštva (Vargas in Araya 2013). Posredno ali neposredno se pojavlja v najrazličnejših vsakodnevni dejavnostih. Prav zato imajo učitelji veliko odgovornost, da pravilno, natančno in celostno predstavijo geometrijske pojme, ideje, izreke ter dokaze svojim učencem, začenši v osnovni šoli (Bayrak, Yüce in Yüce 2014; Boo in Leong 2016; Marchiş 2008; Rolet 2003; Sinclair in Bruce 2015) ali celo v vrtcu (Casey idr. 2008; Huleihil in

Huleihil 2011; Zaranis in Synodi 2017). Seveda to tudi pomeni, da morajo imeti učitelji matematike odlično znanje geometrije (Jupri 2018).

Zakaj sta učenje in poučevanje geometrije sploh pomembna? Da bi lahko odgovorili, moramo razmisliti o nastanku geometrije in o tem, kako so ljudje razumeli oblike, prostor in željo, da spremenijo svet, v katerem so živeli. Človek je imel potrebo, da natančno opiše tisto, kar ga je obdajalo, in geometrija je zanj predstavljala način za opis njegovega sveta (Vargas in Araya 2013).

Običajno se poučevanje geometrije začne pri evklidski geometriji, ki ne predstavlja samo osnove za znanje geometrije, temveč učenci ob tem spoznajo tudi proces matematičnega utemeljevanja (Bayrak, Yüce in Yüce 2014) in dokazovanja (Harel 1999; Herbst idr. 2010). Učenje geometrije pomaga pri razvoju zmožnosti vizualizacije, kritičnega mišljenja, intuicije, perspektive, reševanja problemov, predpostavljjanja, deduktivnega mišljenja, logičnega utemeljevanja in dokazovanja (Jones 2002; Jupri 2018). Poleg tega pa geometrija ponuja tudi kulturni in zgodovinski okvir pri učenju matematike (Jones 2002).

Poučevanje geometrije mora spodbujati učenčevo zanimanje za predmet in ga usmerjati v samostojno raziskovanje ter širjenje njegovega znanja, saj bo učenec na ta način izboljšal svoj odnos do matematike (Abdullah idr. 2014; Jones 2002; Turk in Akyuz 2016). Ko učence spodbujamo, da utemeljijo svoj način reševanja geometrijskih nalog ter artikulirajo in jasno razvijejo svoje ideje, jim pomagamo, da razvijejo tudi komunikacijske sposobnosti in razumejo pomen formalnega dokazovanja (Jones 2002).

Učenje in poučevanje evklidske geometrije

Evklidska geometrija je eno ključnih poglavij, s katerimi se srečujejo učenci osnovnih in srednjih šol v večini držav na svetu (Machisi 2021; Van Putten, Howie in Stols 2010; Wu 1996). Učenje geometrije učence in dijake pripravi za nadaljnji študij matematike, naravoslovja, strojništva ter tehnologije, obenem pa razvije njihove različne sposobnosti, kot so logično mišljenje, racionalno sklepanje in pravilno reševanje problemov (Machisi 2021).

Čeprav je po eni strani učenje evklidske geometrije pomembno za pravilno izgradnjo matematičnega znanja ter sposobnosti sklepanja in dokazovanja, so različni raziskovalci poudarili, da se pri učenju evklidske geometrije pojavljajo različne težave (Jones, Fujita in Kunimune 2012), še posebej s formalnim dokazovanjem (McClure 2000). Kot rešitev tega problema so mnogi raziskovalci predlagali uporabo informacijsko-komunikacijske tehnologije (IKT) za poučevanje geometrije (Bayaga idr. 2019; Kovács 2017; Mthethwa idr. 2020), kar ima lahko pozitivne vplive na učenčevo intuicijo in razumevanje geo-

metrije (Alkhateeb in Al-Duwairi 2019; Diković 2009), vendar samo po sebi ne nadomešča formalnega geometrijskega dokaza. Težave z razumevanjem formalne evklidske geometrije so južnoafriško ministrstvo za šolstvo privedle do tega, da je leta 2006 spremenilo učni načrt za matematiko v srednji šoli, posledično pa evklidske geometrije niso več poučevali (Machisi 2021; Van Putten, Howie in Stols 2010). Od leta 2008 se v Južnoafriški republiki učenci evklidsko geometrijo učijo zgolj na prostovoljni osnovi v 11. in 12. razredu; znanje o njej se preverja s tretjim delom nacionalnega preverjanja znanja, ki ni obvezen in ki ga je leta 2008 rešilo samo 3,8 % učencev 12. razreda – od teh jih je približno polovica dobila manj kot 30 % točk (Van Putten, Howie in Stols 2010). Z dodatnimi raziskavami so ugotovili, da je razlog za nizke dosežke iz evklidske geometrije povezan z učiteljevim slabim razumevanjem geometrijskih pojmov (Askew, Bowie in Venkat 2019; Tachie 2020; Ubah 2022). Leta 2012 so v Južnoafriški republiki ponovno uvedli poučevanje evklidske geometrije (Machisi 2021), kar pa je povečalo anksioznost učencev in učiteljev (Govender 2014).

Z nekaterimi raziskavami (prim. Abdullah in Zakaria 2013; De Villiers in Heidman 2014; Machisi 2021) so poskušali ugotoviti, zakaj imajo učenci težave z razumevanjem evklidske geometrije, še posebej s formalnim dokazovanjem. Razlogov za to je več:

- pouk geometrije je večkrat tradicionalen in učitelj je v središču pozornosti (Abdullah in Zakaria 2013; Siyepu 2014): učenci morajo torej samo sprejeti znanje, formule in izreke, ne da bi imeli pri tem aktivno vlogo (Armah, Cofie in Okpoti 2018); učne oblike, ki predvidevajo učenčevo aktivno vlogo, so učinkovitejše in učencem pomagajo, da bolje razumejo formalne geometrijske pojme (Mensah-Wonkyi in Adu 2016; Yilmazer in Keklikci 2015);
- učitelji zgolj pišejo izreke in dokaze na tablo, učenci pa prepisujejo dokaze z nje, nato se jih naučijo na pamet, ne da bi jih popolnoma razumeli (De Villiers in Heidman 2014): učenci nimajo možnosti, da sami raziskujejo geometrijo in opazujejo (Machisi 2021);
- učitelji ne preverijo, ali imajo učenci zadostno predznanje in ali so razumeli učne vsebine iz predhodnih let (Machisi 2021);
- dokazi so predstavljeni rigidno in so »že pripravljene«, njihovo veljavnost morajo učenci sprejeti, ne da bi si postavili vprašanje, ali izreki sploh veljajo (Machisi 2021).

Da bi premostili zgoraj naštetе težave, so mnogi raziskovalci preučili mo-

del učenja evklidske geometrije, ki temelji na teoriji zakoncev van Hiele (Machisi 2021; Mostafa, Javad in Reza 2017; Ndlovu 2013; Siyepu 2014; Tahani 2016; Usman, Yew in Saleh 2019).

Model van Hiele

Teoretični model

Model geometrijskega razmišljanja zakoncev van Hiele je nastal iz doktorskih disertacij Dine van Hiele-Geldof in njenega moža Pierra van Hieleja, ki sta ju zagovarjala istočasno na univerzi v Utrechtu leta 1957 (Crowley 1987). Teorija zakoncev van Hiele se je hitro razširila v Sovjetski zvezi, kjer je v šestdesetih letih prišlo do reforme učnega načrta geometrije, da bi se uvedlo njun model poučevanja tega predmeta, v ostalih državah pa se je nova teorija širila zelo počasi, saj se je prvi angleški prevod njunih del pojavil šele leta 1984 (Crowley 1987).

Model van Hiele je sestavljen iz petih ravni razumevanja geometrije; te so vizualizacija, analiza, neformalna dedukcija, formalna dedukcija in strogo matematična stopnja (Burger in Shaughnessy 1986; Crowley 1987; Vargas in Araya 2013), navadno pa jih označujemo s številkami od 0 do 4 (ali od 1 do 5) (Vargas in Araya 2013). S temi ravnmi lahko dobro opišemo lastnosti procesa geometrijskega razmišljanja, od enostavnega opazovanja lastnosti geometrijskih likov do rigoroznega in formalnega dokazovanja (t. i. strogo matematične stopnje) (Crowley 1987; Howse in Howse 2014; Vargas in Araya 2013):

o. *Vizualizacija*: na tej ravni se učenci zavedajo prostora samo kot nečesa, kar obstaja okoli njih. Geometrijski koncepti so torej popolne entitete, ne pa tisto, kar ima komponente in attribute. Geometrijske like prepoznamo samo po obliki, torej fizični prisotnosti, ne pa kot del nečesa drugega ali po lastnostih, ki jih opredeljujejo. Učenci, ki funkcionirajo na tej ravni, se lahko naučijo zgolj enostavnega geometrijskega izrazoslovja, prepoznajo specifične oblike in reproducirajo like. Učenci lahko npr. prepoznajo kvadrat in pravokotnik ter razlikujejo med njima, saj so ti obliki že videli in ju spoznali. Če imajo pred sabo papir ali geoploščo, lahko reproducirajo iste oblike. Na tej ravni ne razumejo, da imata kvadrat in pravokotnik prave kote ali dva para vzporednih nasprotnih stranic.

1. *Analiza*: na tej ravni se začne analiza geometrijskih konceptov. Primer: z opazovanjem in eksperimentiranjem učenci razumejo lastnosti likov. Te uporabijo za to, da ustvarijo razrede oblik. Učenci prepoznajo različne dele, ki sestavljajo geometrijske like, in jih uporabljajo, da prepo-

znajo druge like. Tako npr. z barvanjem skladnih kotov razumejo, da sta nasprotna kota paralelograma skladna. Po primernem številu takih vaj lahko posplošujejo lastnosti na vse paralelograme. Na tej ravni se sicer povezave med liki še niso izoblikovale in učenci še ne razumejo definicij.

2. *Neformalna dedukcija*: na tej ravni lahko učenci razumejo povezave med lastnosti likov, npr. da je kvadrat pravokotnik, ker ima vse lastnosti pravokotnika. Učenci torej lahko razumejo lastnosti likov in prepoznajo razrede likov. Razumejo tudi povezavo med različnimi množicami likov (npr. da so vsi kvadrati obenem pravokotniki in vsi pravokotniki posebna vrsta paralelogramov). Razumejo definicije in znajo neformalno utemeljiti trditve. V tej fazi ne razumejo pomena dedukcije in aksiomov. Deduktivno razmišljanje uporabljajo skupaj z eksperimentalnimi rezultati. Niso pa še sposobni razumeti dokazov in logičnega reda, ki mu je treba slediti, da se trditev formalno dokaže.
3. *Formalna dedukcija*: na tej ravni učenci razumejo pomen dedukcije kot načina dokazovanja izrekov; sposobni so tudi razumeti aksiome. Razumejo odnose med nedefiniranimi izrazi, aksiomi, postulati, definicijami, izreki in dokazi. Na tej ravni lahko konstruirajo (in se ne zgolj naučijo na pamet) dokaze izrekov. Prepoznajo tudi razliko med trditvijo in njeno negacijo (tj. nasprotno trditvijo). Razumejo odnos med zadostnimi in potrebnimi pogoji.
4. *Strogo matematična stopnja*: na tej ravni znajo učenci pravilno razmišljati v različnih aksiomatskih sistemih, torej se lahko učijo neevklidskih geometrij in evklidsko geometrijo lahko primerjajo z neevklidsko. Geometrijo razumejo tudi na abstraktnější ravni.

Večina srednješolske geometrije se dogaja na ravni formalne dedukcije (tj. na ravni 3), zato so se raziskave na tem področju večinoma osredotočale na nižje ravni (Crowley 1987).

Model van Hiele ponuja vpogled v način geometrijskega razmišljanja, obenem pa tudi določena didaktična priporočila (Crowley 1987; Vargas in Araya 2013):

- *Postopnost*: učenec mora iti urejeno in postopno skozi vse faze geometrijskega razmišljanja. Da lahko obvlada vsebine, ki so značilne za določeno raven, mora usvojiti tudi proceduralne strategije, tj. strategije reševanja problemov.
- *Napredek*: dejstvo, da učenec napreduje z nižje na višjo raven, je od-

visnejše od predstavljenih vsebin in didaktičnih metodologij kot od starosti. Obenem pa nobena metoda učenja in poučevanja ne omogoča, da učenec zgolj »preskoči« raven: obstajajo metode, da se pospeši učenčev napredek na višje ravni, druge metode pa upočasnijo napredek in celo onemogočijo prehod z ene ravni na višjo. Primer tega je učenje določenih formul ali odnosov, kot »kvadrat je pravokotnik«, na pamet, ne da bi jih razumeli.

- *Intrinzično in ekstrinzično*: intrinzične lastnosti geometrijskih objektov na neki ravni postanejo ključni predmet študija na višji ravni. Na ravni o se npr. upošteva zgolj obliko lika. Ne glede na to pa lik določajo nekatere lastnosti, ki jih učenec ne razume, dokler ne preide na raven 1. Šele takrat razume, kako je lik sestavljen in katere so njegove glavne lastnosti.
- *Jezik*: Na vsaki ravni se uporablja specifične simbole in jezik pa tudi svojevrsten način povezovanja teh simbolov. Torej se povezuje, ki je pravilna na neki ravni, lahko na drugi delno ali popolnoma spremeni. Kvadrat je npr. pravokotnik, vendar tudi paralelogram. Učenec na prvi ravni še ne more razumeti take vrste gnezdenja pojmov ($\text{kvadrat} \subseteq \text{pravokotnik} \subseteq \text{paralelogram} \subseteq \text{štirikotnik}$); šele na višji ravni lahko uporablja »nove« besede. Drugi primer zadeva pojem skladnost. S pojmom skladnost likov se lahko učenec sreča že na prvi ravni, ko opazi, da se dva kvadrata popolnoma prekrivata. Učenec bo rekel, da sta lika »enaka«; šele na višjih ravneh se bo naučil, da ne gre za »enakost«, temveč »skladnost«, in da je to posebna vrsta povezave med geometrijskimi objekti.
- *Neskladnost*: če se učenec nahaja na določeni ravni, poučevanje pa na drugi, do učenja in želenega napredka ne bo prišlo. Če so npr. učitelj, učbeniki in uporabljeni jezik na višji ravni, učenec pa na nižji, bo imel večje težave, da napreduje na naslednjo raven.

Kot že omenjeno, model van Hiele predvideva, da je napredek z nižjega na višjo raven odvisnejši od načina učenja in poučevanja kot od starosti učenca ali njegove zrelosti (Crowley 1987). Prav zato je pomembno natančno raziskati didaktične metode, ki so primernejše za poučevanje evklidske geometrije. Dina in Pierre van Hiele sta predstavila pet zaporednih faz učenja: (1) raziskovanje, (2) vodeno orientacijo, (3) pogovor, (4) prosto orientacijo in (5) integracijo (Hiele 1985). Van Hielejeva trdita, da tak način učenja in poučevanja geometrije spodbuja napredek na višje ravni geometrijskega razmišljanja. Mary L. Crowley (1987) predstavlja potek teh petih faz na primeru romba na drugi ravni:

1. *Raziskovanje*: v tej začetni fazi se učitelj in učenci pogovorijo o dejavnosti, ki zadeva rombe. Učenci opazujejo lik in sprašujejo; pri tem učitelj uvaja besedišče, ki je tipično za raven (v našem primeru je to druga). Učitelj npr. vpraša: »Kaj je romb? Je to kvadrat? Je paralelogram? Ali jima je podoben? Ali se razlikuje od njiju? Mislite, da je lahko kvadrat tudi romb? Ali je lahko romb tudi kvadrat? Zakaj to mislite?« S tem: (1) učitelj razume predznanje učencev o obravnavani temi; (2) učenci razumejo, kako bodo obravnavali novo učno vsebino. *Vodena orientacija*: učenci raziskujejo tematiko s pomočjo gradiva, ki ga je učitelj skrbno pripravil. S takimi dejavnostmi naj bi učenci postopno razumeli določene strukture in lastnosti, ki se jih raziskuje v tej fazi. Gradivo je torej sestavljeno prav za to, da učenci odkrijejo določene lastnosti geometrijskih objektov. Učitelj npr. učencem naroči, naj konstruirajo romb na geoplošči tako, da ima ta dve skladni diagonalni. Druga vaja predvideva konstrukcijo romba s štirimi pravimi koti, nato s tremi pravimi koti, z dvema pravima kotoma in z enim pravim kotom.
2. *Pogovor*: v povezavi s prejšnjimi dejavnostmi se učenci pogovorijo o dejavnosti in opazovanjih. Učiteljeva vloga je minimalna. Med to fazo se gradijo odnosi med objekti in njihovimi lastnostmi.
3. *Prosta orientacija*: učenci se srečujejo s težjimi problemi, ki zahtevajo večje število korakov, da se jih reši, ali z odprtimi problemi. Pridobijo izkušnje z iskanjem svojih poti reševanja problemov. S tem, ko se sami orientirajo znotraj raziskovalne tematike, prepoznajo različne povezave med objekti.
4. *Integracija*: učenci povzamejo ključne pojme, ki so jih spoznali, in ustvarijo povezave s prej naučenimi pojmi ter relacijami. Učitelj lahko razred vodi do splošnega spoznanja. Pomembno je poudariti, da v tej fazi učenci ne spoznajo novih pojmov in lastnosti, temveč samo povzamejo tisto, kar so se naučili med učno uro. Na koncu učne ure so učenci dosegli novo raven razmišljanja, ki nadomesti in dopolni njihovo znanje.

Uporaba modela

Učenje in poučevanje evklidske geometrije potekata na vseh petih ravneh, ki jih predvideva model geometrijskega razmišljanja zakoncev van Hiele. Glede kompetenc, ki jih učenci razvijejo na posameznih ravneh modela, sta Gutiérrez in Adela Jaime (1998) predstavila pet različnih sfer (glej preglednico 1; brez upoštevanja ravni o):

- *Prepoznavanje*: ta kompetenca je prisotna na nižjih ravneh, in sicer na

prvi ravni učenci prepoznajo geometrijske objekte, kot sta kvadrat ali trikotnik, zgolj na podlagi fizičnih lastnosti njunih modelov. Učenci lahko npr. vidijo, da so vse stranice kvadrata enako dolge, trikotnik pa ima »špico« in samo tri stranice. Na drugi ravni učenci prepoznajo like tudi po njihovih matematičnih lastnostih. Če torej obravnavajo »lik brez diagonal«, prepoznajo trikotnik.

- *Uporabljanje definicij*: sposobnost uporabe definicije nastopi šele na drugi ravni, ko učenci razumejo enostavne definicije z enostavno strukturo, npr. »kvadrat je lik, ki ima štiri skladne stranice in vse notranje kote prave«. Na tretji ravni učenci razumejo vse definicije, tudi tiste s kompleksnejšo strukturo, na četrti pa so sposobni sprejeti možnost, da obstaja več ekvivalentnih definicij, npr. »kvadrat je romb z enim pravim kotom« in »kvadrat je paralelogram s pravokotnima in skladnima diagonalama«.
- *Oblikovanje definicij*: učenci so sposobni sestaviti (oblikovati) definicije že na prvi ravni, vendar te temeljijo zgolj na seznamu fizičnih lastnosti likov. Npr.: »Kvadrat je lik, ki ima vse stranice enake in ni poševen« (ni romb). Na drugi ravni znajo podati definicijo, v kateri naštejejo matematične lastnosti geometrijskih objektov, na tretji pa znajo predstaviti potrebne in zadostne pogoje za definicijo objektov. Šele na četrti ravni so sposobni dokazati ekvivalenco med različnimi definicijami.
- *Klasifikacija*: učenci znajo klasificirati geometrijske objekte na podlagi izključujočih in vključujočih lastnosti. Na nižjih ravneh so sposobni samo izključujoče klasifikacije (npr. »Trikotnik ni kvadrat, ker nima 4 stranic«). Šele na tretji ravni preklapljajo iz izključujoče v vključujočo klasifikacijo (npr. »Ker ima kvadrat vse stranice skladne, je to romb«).
- *Dokazovanje*: ker je to kompleksnejša kompetenca, je ta prisotna na višjih ravneh geometrijskega razumevanja. Na drugi ravni znajo učenci s primerom pokazati, da dana trditev velja. Informalni logični dokaz nastopi šele na tretji ravni, ko znajo učenci neformalno dokazati, zakaj trditev velja. Na četrti ravni pa so sposobni formalnega matematičnega dokaza, ki sledi logičnemu poteku (glej preglednico 1).

Model van Hiele je uporaben tudi kot model učenja in poučevanja izrekov ter dokazov evklidske geometrije (Machisi 2021). Ko se učenci učijo definicij, ki jih je postavil Evklid, oz. se srečujejo z izreki in dokazi evklidske geometrije, je nujno, da se njihova raven geometrijskega razumevanja in razmišljanja sklada z učiteljevo. Če je učenec na nižji ravni, torej ni popolnoma razumel vsebin, ki zahtevajo nižjo stopnjo abstrahiranja, učitelj pa poučuje na

Preglednica 1 Kompetence in model van Hiele

Kompetenca	Raven 1	Raven 2	Raven 3	Raven 4
Prepoznati	Fizične lastnosti	Matematične lastnosti	–	–
Uporabljati definicije	–	Samo definicije z enostavno strukturo	Vsaka definicija	Sprejeti možnost več ekvivalentnih definicij
Oblikovanje definicij	Seznam fizičnih lastnosti	Seznam matematičnih lastnosti	Množica potrebnih in zadostnih pogojev	Dokaz ekvivalence med definicijami
Klasifikacija	Izključujoča, ki temelji na fizikalnih lastnostih	Izključujoča, ki temelji na matematičnih lastnosti	Izključujoča in vključujoča	–
Dokazovanje	–	Pokazati s primerom	Informalni logični dokaz	Formalni matematični dokaz

Opombe Povzeto po Gutiérrez in Jaime (1998).

višji ravni in uporablja izraze, ki so učencu tuji in nerazumljivi, pride do metaforičnega kratkega stika in pouk geometrije je popolnoma sterilen. Učenec namreč še ni pripravljen sprejemati informacij na višji ravni, ker še ni vešč izrazoslovja in metod, tipičnih za nižje ravni.

Burger in Shaughnessy (1986) sta predstavila izčrpen seznam težav, ki jih imajo učenci pri razumevanju geometrije na posameznih ravneh (prim. De Villiers (2010)). Njune sklepe predstavimo tako, da združimo težave v dve kategoriji: tiste, ki so prisotne do vključno druge ravni (težave na nižjih ravneh), in tiste, ki so prisotne na tretji in četrti ravni (težave na višjih ravneh):

1. Težave na nižjih ravneh:

- učenci uporabljajo nerelevantne vizualne lastnosti likov, da jih med seboj primerjajo, klasificirajo in opišejo;
- učenci se večkrat naslanjajo na vizualne prototipe likov in jih posledično različna orientacija le-teh zmede;
- nezmožnost, da se razmisli o neskončnih različicah istega lika (npr. v orientaciji in obliki);
- nekonsistentna klasifikacija likov, npr. z uporabo nelogičnih ali nerelevantnih lastnosti likov pri njihovi klasifikaciji;
- nepopolni opisi (definicije) likov in vključevanje potrebnih (večkrat vizualnih) pogojev med zadostne pogoje;
- eksplicitno primerjanje likov zgolj na podlagi njihovih lastnosti;
- napačna interpretacija inkluzije med različnimi razredi likov, npr.

predstavitev kvadratov in pravokotnikov kot disjunktnih množic likov;

- kategorizacija likov zgolj z uporabo ene lastnosti, pri čemer se ne upoštevajo druge lastnosti, kot so simetrije, notranji koti in diagonale (npr. predstavitev romba in kvadrata kot istega lika, ker imata vse stranice skladne);
- neekonomična uporaba lastnosti likov za to, da se jih opiše, ne da bi se uporabljali samo zadostni pogoji (npr. definicija kvadrata kot štirikotnika z vsemi stranicami skladnimi, vsemi notranjimi koti skladnimi, s skladnima diagonalama, ki se razpolavljata);
- zavračanje definicij drugih oseb, npr. učiteljev, da dajejo prednost svojim definicijam;
- uporaba empiričnih podatkov, da se potrdi resničnost splošnih trditvev, npr. upoštevati skice kot absolutno resnico;

2. težave na višjih ravneh:

- nesposobnost oblikovanja pravih definicij za like;
- nesposobnost spontanega spreminjanja nedokončanih definicij v pravilne dokončane definicije in nesposobnost pravilno jih uporabljati za delo z novimi koncepti;
- nesposobnost sprejetja različnih enakovrednih definicij za isti koncept;
- nesposobnost hierarhične klasifikacije likov, npr. štirikotnikov;
- nesposobnost eksplicitne uporabe logične oblike »če ... potem« pri oblikovanju hipotez in implicitnih logičnih pravil, kot je npr. *modus ponens*;
- nejasnost in nedoločenost pomena aksiomov, definicij ter dokazov;
- nerazumevanje aksiomov, definicij in dokazov;
- pomanjkanje sposobnosti samostojnega postavljanja hipotez in poskusov njihovega deduktivnega dokazovanja.

Za delno rešitev zgoraj omenjenih težav raziskave svetujejo, naj učitelji spodbujajo reševanje problemov, tj. nalog višje taksonomske ravni (Andira, Darwis in Syam 2022; Sulistiowati, Herman in Jupri 2018). Obenem pa je pomembno poudariti, da morajo imeti učitelji matematike dobro razvite sposobnosti reševanja geometrijskih nalog in zadostno predznanje na tem področju (Ndlovu 2014).

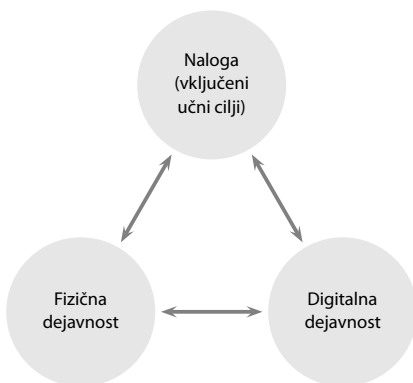
IKT in učenje geometrije

Učenje in poučevanje geometrije sta se skozi leta delno spremenila. Z nastopom tehnologije se je pojavilo veliko zanimanje za poučevanje geometrije s

pomočjo računalnikov, grafičnih tablic in pametnih telefonov (Alkhateeb in Al-Duwairi 2019). Različne raziskave so preučile možnost učenja in poučevanja geometrije s posebnimi programskimi opremami, kot je npr. GeoGebra (Yohannes in Chen 2021). V primerjavi s tistimi, ki se geometrije učijo tradicionalno, učenci, ki uporabljajo tovrstno programsko opremo, dosegajo višje rezultate pri testih znanja (Alkhateeb in Al-Duwairi 2019; Uwurukundo, Maniraho in Tusiime Rwibasira 2022) in razvijejo druge kompetence na področju znanstvenih predmetov (Ziatdinov in Valles 2022). Prav zato so nekateri menja, da je nujno uvajati učenje in poučevanje geometrije s tehnologijo (Ade-labu, Makgato in Ramaligela 2019; Uwurukundo, Maniraho in Tusiime Rwibasira 2022). Poleg tega so druge raziskave pokazale, da sta učenje in poučevanje geometrije zabavnejša, če se uporablja tudi IKT (Celen 2020). Učenje in poučevanje geometrije s pomočjo programske opreme pozitivno vpliva tudi na učenčevo motivacijo (Hosseini, Mehdizadeh in Sadegi 2022; Putra idr. 2020; Septian in Monariska 2021). Z uporabo programske opreme za dinamično geometrijo lahko učenci premikajo like in geometrijske objekte, s tem pa se naučijo abstraktnega mišljenja na aktiven način ter sami gradijo novo znanje in kompetence (Bayaga idr. 2019; Dahal, Shrestha in Pant 2019; Yimer in Feza 2019; Ziatdinov in Valles 2022). Nekatere raziskave so preučile možnost učenja geometrije po modelu van Hiele s pomočjo programske opreme (Gawlick 2005; Karakuş in Peker 2015; Kutluca 2013; Olkun, Sinoplu in Deryakulu 2005). Z uporabo programske opreme za dinamično geometrijo lahko učenci sami odkrivajo lastnosti likov (Kutluca 2013; Olkun, Sinoplu in Deryakulu 2005) in izboljšajo svoje razumevanje geometrijskih pojmov (Karakuş in Peker 2015; Olkun, Sinoplu in Deryakulu 2005).

Čeprav so prej omenjene raziskave pokazale, da se je z uporabo digitalne tehnologije znanje učencev izboljšalo, je po izsledkih drugih raziskav to znanje kratkotrajno (Ng, Shi in Ting 2020). Z uporabo IKT in programske opreme za dinamično geometrijo torej ne moremo popolnoma nadomestiti klasičnega, tradicionalnega načina poučevanja geometrije, dokazovanja in utemeljevanja (Stupel in Ben-Chaim 2021). Tehnologija lahko pomaga pri boljši reprezentaciji geometrijskih pojmov in je v tem smislu zgolj orodje (Dahal, Shrestha in Pant 2019). Pri tem naj omenimo idejo manipulacije geometrijskih objektov (slika 1), kot sta jo predstavila Komatsu in Jones (2020). Fizična aktivnost, ki se dogaja na papirju, predvideva reševanje problema in modeliranje v tradicionalnem modelu učenja ter poučevanja geometrije, medtem ko digitalna dejavnost zadeva konstrukcijo in manipulacijo dinamičnega modela v digitalnem okolju (npr. v GeoGebri).

Da bi združili pozitivne lastnosti modela poučevanja geometrije s tehnologijo in modela van Hiele ter v luči zgoraj omenjenega modela interakcije



Slika 1 Model interakcije med fizično in digitalno dejavnostjo (prirejeno po Komatsu in Jones (2020))



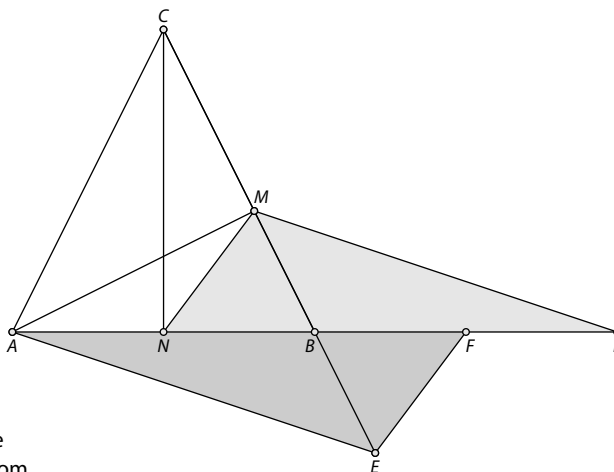
Slika 2 Proces predlaganega modela

med fizično in digitalno dejavnostjo (glej tudi Komatsu in Jones (2020) ter Koyuncu, Akyuz in Cakiroglu (2015)) predlagamo nov, kombinirani način učenja in poučevanja evklidske geometrije. V tem modelu želimo spodbujati (1) rigoroznost in natančnost geometrijskega dokazovanja, (2) natančnost geometrijskih konstrukcij z ravnilom in s šestilom ter (3) predstavitev in manipulacijo geometrijskih objektov z IKT (slika 2). Predstavljeni model temelji na interakciji med digitalno in fizično dejavnostjo (Komatsu in Jones 2020) (slika 1), tj. na reševanju naloge (ali konstrukcije) z instrumenti in IKT, vendar se od tega razlikuje v tem, da sta v predlagani model (slika 2) vključena tudi formalno dokazovanje in utemeljevanje.

Model je uporaben, ko se učenci srečujejo z nalogami iz evklidske geometrije, ki temeljijo na konstrukcijah, npr.: »Načrtaj trikotnik ABC in težiščnici AM in CN. Podaljšaj stranico CB z daljico BE, ki je skladna z BM, ter podaljšaj stranico AB z daljico BL, ki je skladna z AB. Naj bo F središče daljice BL. Dokaži, da sta trikotnika NML in AFE skladna« (slika 3). Ker gre za nov model, so potrebne dodatne raziskave, da se ga preizkusi in dopolni. Prihodnje raziskave lahko preučijo različne možnosti konkretne uporabe opisanega modela.

Primer uporabe predstavljenega teoretičnega modela je naslednji: učence v razredu razdelimo v tri skupine, ki med učno uro rotirajo in si izmenjujejo vloge (slika 2);

- prva skupina je zadolžena za konstrukcijo na tabli ali na papirju, uporabi lahko samo ravnila in šestila; če šola razpolaga z ravnilom in s šestili za risanje na tablo, lahko skupina sodeluje in riše na tabli;



Slika 3

Primer vaje, ki jo je mogoče rešiti s predlaganim modelom

- druga skupina istočasno uporablja računalnik (ali več računalnikov, tabličnih računalnikov ali pametnih telefonov), da opravi isto konstrukcijo s programsko opremo dinamične geometrije (npr. GeoGebra);
- tretja skupina reši nalogo z uporabo formalnega dokazovanja in geometrijskega utemeljevanja.

Ko je vsaka skupina rešila nalogo, se skupine zamenjajo tako, da vsak učenec vsako nalogo preizkusi vsaj enkrat. Naj omenimo, da vzporedno delo po skupinah ni vedno mogoče: pri reševanju določenih nalog (glej sliko 3) npr. ni smiselno, da ena skupina že na začetku začne s formalnim dokazovanjem. V tem primeru je smiselneje, da skupine najprej konstruirajo problem (na papirju in z IKT), šele nato pa začnejo s formalnim dokazovanjem.

Za reševanje naloge, ki smo jo prej predstavili (slika 3), je, denimo, koristno, da razred najprej razdelimo na dve skupini: prva je zadolžena za konstrukcije z IKT, druga pa za konstrukcije z uporabo ravnila in šestila. Ko obe skupini zaključita konstrukcijo, si zamenjata vlogi z namenom, da obe rešita nalogo s formalnim dokazovanjem in z utemeljevanjem.

Model, ki ga predlagamo, je torej prožen in dopušča več možnosti: učitelj mora na podlagi problema, ki ga želi rešiti, premisliti, katera razporeditev je najboljša. Predlagani model se od prejšnjih razlikuje, ker obsega različne ključne elemente pouka geometrije, tj. formalizma na eni strani in reprezentacije na drugi. Predpostavljamo, da bo tako znanje učencev trajnejše (prim. Ng, Shi in Ting 2020) in bolj poglobljeno. Multimodalni pristop torej učenec omogoča, da isti problem rešijo s konstrukcijami in z IKT (prim. Koyuncu, Akyuz in Cakiroglu 2015), obenem pa urijo svoje komunikacijske sposobnosti,

sposobnosti logičnega sklepanja, dokazovanja in utemeljevanja (prim. Bone, Cotič in Felda 2021). Ker še nismo zasledili raziskave, ki bi uporabila predlagani model, ga je treba testirati in eksperimentirati; dodatne raziskave so torej potrebne, da se potrdijo koristi kombiniranega učenja geometrije.

Literatura

- Abdullah, A. H., N. H. Ibrahim, J. Surif in E. Zakaria. 2014. »The Effects of Van Hiele's Phase-Based Learning on Students' Geometric Achievement and Attitude towards Geometry.« V *2014 International Conference on Teaching and Learning in Computing and Engineering: Proceedings*, uredil J. Guerrero, 317–324. Danvers, MA: Institute of Electrical and Electronics Engineers.
- Abdullah, A. H., in E. Zakaria. 2013. »Enhancing Students' Level of Geometric Thinking through Van Hiele's Phase-Based Learning.« *Indian Journal of Science and Technology* 6 (5): 4432–4446.
- Adelabu, F. M., M. Makgato in M. S. Ramaligela. 2019. »The Importance of Dynamic Geometry Computer Software on Learners' Performance in Geometry.« *Electronic Journal of E-Learning* 17 (1): 52–63.
- Alkhateeb, M. A., in A. M. Al-Duwairi. 2019. »The Effect of Using Mobile Applications (GeoGebra and Sketchpad) on the Students' Achievement.« *International Electronic Journal of Mathematics Education* 14 (3): 523–533.
- Andira, A., M. Darwis in H. Syam. 2022. »Exploring of Students' Ability to Solve Geometry Problems Based on Van Hiele's Level of Thinking.« *ETDC Indonesian Journal of Research and Educational Review* 1 (2): 192–200.
- Armah, R. B., P. O. Cofie in C. A. Okpoti. 2018. »Investigating the Effect of Van Hiele Phase-Based Instruction on Pre-Service Teachers' Geometric Thinking.« *International Journal of Research in Education and Science* 4 (1): 314–330.
- Askew, M., L. Bowie in H. Venkat. 2019. »Pre-Service Primary Teachers' Mathematical Content Knowledge: An Exploratory Study.« *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education* 23 (3): 286–297.
- Bayaga, A., M. M. Mthethwa, M. J. Bossé in D. Williams. 2019. »Impacts of Implementing GeoGebra on Eleventh Grade Student's Learning of Euclidean Geometry.« *South African Journal of Higher Education* 33 (6): 32–54.
- Bayrak, N., S. Yüce in M. K. Yüce. 2014. »The Investigation of the Viewpoint of Academic Staff and Graduate Students in Teaching Geometry in Elementary School.« *Procedia: Social and Behavioral Sciences* 116:2115–2119.
- Bone, J., M. Cotič in D. Felda. 2021. »Utemeljevanje pri pouku matematike.« *Peдагоška obzorja* 36 (1): 33–52.
- Boo, Y. J., in K. E. Leong. 2016. »Teaching and Learning Geometry in Primary School Using GeoGebra.« V *Electronic Proceedings of the 21st Asian Technology Conference in Mathematics*, uredil D. B. Meade, 289–300. Pattaya: Mathematics and Technology.

- Burger, W. F., in J. M. Shaughnessy. 1986. »Characterizing the Van Hiele Levels of Development in Geometry.« *Journal for Research in Mathematics Education* 17 (1): 31–48.
- Casey, B., S. Erkut, I. Ceder in J. M. Young. 2008. »Use of a Storytelling Context to Improve Girls' and Boys' Geometry Skills in Kindergarten.« *Journal of Applied Developmental Psychology* 29 (1): 29–48.
- Celen, Y. 2020. »Student Opinions on the Use of Geogebra Software in Mathematics Teaching.« *Turkish Online Journal of Educational Technology* 19 (4): 84–88.
- Crowley, M. L. 1987. »The Van Hiele Model of the Development of Geometric Thought.« *V Learning and Teaching Geometry, K-12, 1987: Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics*, uredila M. Montgomery Lindquist, 1–16. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Dahal, N., D. Shrestha in B. P. Pant. 2019. »Integration of GeoGebra in Teaching and Learning Geometric Transformation.« *Journal of Mathematics and Statistical Science* 5 (12): 323–332.
- De Villiers, M. 2010. »Some Reflections on the Van Hiele Theory.« Prispevek predstavljen na 4th Congress of Teachers of Mathematics of the Croatian Mathematical Society, Zagreb, Hrvatska, 30. junij–2. julij.
- De Villiers, M., in N. Heideman. 2014. »Conjecturing, Refuting and Proving within the Context of Dynamic Geometry.« *Learning and Teaching Mathematics* 2014 (17): 20–26.
- Diković, L. 2009. »Applications GeoGebra Into Teaching Some Topics of Mathematics at the College Level.« *Computer Science and Information Systems* 6 (2): 191–203.
- Gawlick, T. 2005. »Connecting Arguments to Actions: Dynamic Geometry as Means for the Attainment of Higher Van Hiele Levels.« *ZDM: International Journal on Mathematics Education* 37 (5): 361–370.
- Govender, R. 2014. »Rider Strategies for Solving School Geometry Problems.« *V Proceedings of the 20th Annual National Congress of the Association for Mathematics Education of South Africa: Demystifying Mathematics*, uredili M. Lebitso in A. Maclean, 4–5. Kimberley: Association for Mathematics Education of South Africa.
- Graumann, G. 2011. »Mathematics for Problems in the Everyday World.« *V Real-World Problems for Secondary School Mathematics Students*, uredila J. Masz in J. O'Donoghue, 113–122. Rotterdam: Sense.
- Gutiérrez, A., in A. Jaime. 1998. »On the Assessment of the Van Hiele Levels of Reasoning.« *Focus on Learning Problems in Mathematics* 20 (2–3): 27–46.
- Harel, G. 1999. »Students' Understanding of Proofs: A Historical Analysis and Implications for the Teaching of Geometry and Linear Algebra.« *Linear Algebra and its Applications* 302–303:601–613.
- Herbst, P., C. Chen, M. Weiss, G. Gonzalez, T. Nachlieli, M. Hamlin in C. Brach.

2010. »'Doing Proofs' in Geometry Classrooms.« V *Teaching and Learning Proof across the Grades: A K-16 Perspective*, uredili D. A. Stylianou, M. L. Blanton in E. J. Knuth, 250–268. New York: Routledge.
- Hiele, P. M. van. 1985. *The Child's Thought and Geometry*. New York: City University of New York.
- Hosseini, Z., M. Mehdizadeh in M. Sadegi. 2022. »Using GeoGebra in Teaching Geometry to Enhance Students Academic Achievement and Motivation.« *Innovare Journal of Education* 10 (3): 34–38.
- Howse, T. D., in M. E. Howse. 2014. »Linking the Van Hiele Theory to Instruction.« *Teaching Children Mathematics* 21 (5): 304–313.
- Huleihil, M., in H. Huleihil. 2011. »Digital Text Based Activity: Teaching Geometrical Entities at the Kindergarten.« V *Intelligent Interactive Multimedia Systems and Services*, uredil G. A. Tsihrintzis, 99–112. Berlin: Springer.
- Jones, K. 2002. »Issues in the Teaching and Learning of Geometry.« V *Aspects of Teaching Secondary Mathematics: Perspectives on Practice*, uredila L. Haggarty, 121–139. London: Routledge.
- Jones, K., T. Fujita in S. Kunimune. 2012. »Promoting Productive Reasoning in the Teaching of Geometry in Lower Secondary School: Towards a Future Research Agenda.« V *Pre-Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education (ICME-12)*, uredil S. Je Cho, 2387–2396. Seoul: International Commission on Mathematical Instruction.
- Jupri, A. 2018. »Using the Van Hiele Theory to Analyze Primary School Teachers' Written Work on Geometrical Proof Problems.« *Journal of Physics: Conference Series* 1013 (1): 012117.
- Karakuş, F., in M. Peker. 2015. »The Effects of Dynamic Geometry Software and Physical Manipulatives on Pre-Service Primary Teachers' Van Hiele Levels and Spatial Abilities.« *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education* 6 (3): 338–365.
- Komatsu, K., in K. Jones. 2020. »Interplay between Paper-and-Pencil Activity and Dynamic-Geometry-Environment Use During Generalisation and Proving.« *Digital Experiences in Mathematics Education* 6 (2): 123–143.
- Kovács, Z. 2017. »Automated Reasoning Tools in GeoGebra: A New Approach for Experiments in Planar Geometry.« *South Bohemia Mathematical Letters* 25 (1): 48–65.
- Koyuncu, I., D. Akyuz in E. Cakiroglu. 2015. »Investigating Plane Geometry Problem-Solving Strategies of Prospective Mathematics Teachers in Technology and Paper-and-Pencil Environments.« *International Journal of Science and Mathematics Education* 13 (4): 837–862.
- Kutluca, T. 2013. »The Effect of Geometry Instruction with Dynamic Geometry Software: GeoGebra on Van Hiele Geometry Understanding Levels of Students.« *Educational Research and Reviews* 8 (17): 1509–1518.
- Machisi, E. 2021. »Grade 11 Students' Reflections on their Euclidean Geometry

- Learning Experiences.« *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education* 17 (2): em1938.
- Marchiş, I. 2008. »Geometry in Primary School Mathematics.« *Educția* 21 (6): 131–139.
- McClure, J. E. 2000. »Start Where They Are: Geometry as an Introduction to Proof.« *American Mathematical Monthly* 107 (1): 44–52.
- Mensah-Wonkyi, T., in E. Adu. 2016. »Effect of the Inquiry-Based Teaching Approach on Students' Understanding of Circle Theorems in Plane Geometry.« *African Journal of Educational Studies in Mathematics and Sciences* 12:61–74.
- Mostafa, M., L. M. Javad in O. H. Reza. 2017. »The Effect of Van Hiele Theory-Based Teaching Educational Package on Achievement Goal Orientation of Student Teachers.« *Review of European Studies* 9 (1): 93–105.
- Mthethwa, M., A. Bayaga, M. J. Bossé in D. Williams. 2020. »GeoGebra for Learning and Teaching: A Parallel Investigation.« *South African Journal of Education* 40 (2). <https://doi.org/10.15700/saje.v40n2a1669>.
- Ndlovu, M. 2013. »The Learning of Geometry as Moving from One Thinking Level to the Next: Revising Van Hiele.« *V Proceedings of the 19th Annual Congress of the Association for Mathematics Education of South Africa*, uredila Z. Davies in S. Jaffer, 277–279. Cape Town: Association for Mathematics Education of South Africa.
- . 2014. »Pre-Service Teachers' Understanding of Geometrical Definitions and Class Inclusion: An Analysis Using the Van Hiele Model.« *V INTED 2014: Conference Proceedings*, uredili L. Gómez Chova, A. López Martínez in I. Candel Torres, 6642–6652. Valencia: International Academy of Technology, Education and Development.
- Ng, O. L., L. Shi in F. Ting. 2020. »Exploring Differences in Primary Students' Geometry Learning Outcomes in Two Technology-Enhanced Environments: Dynamic Geometry and 3D Printing.« *International Journal of STEM Education* 7 (1): 50.
- Olkun, S., N. B. Sinoplu in D. Deryakulu. 2005. »Geometric Explorations with Dynamic Geometry Applications Based on Van Hiele Levels.« *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*. <https://doi.org/10.1501/0003625>.
- Putra, A., M. Hafis, L. Laswadi in M. Oktafia. 2020. »Gallery of Learning with Geogebra: Does it Affect Students' Learning Motivation?« *Indonesian Journal of Science and Mathematics Education* 3 (2): 210–218.
- Rolet, C. 2003. »Teaching and Learning Plane Geometry in Primary School: Acquisition of a First Geometrical Thinking.« *V European Research in Mathematics Education III: Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, 28 February–3 March 2003, Bellaria, Italia, uredila M. A. Mariotti, 1–9. Bellaria: University of Pisa.

- Septian, A., in E. Monariska. 2021. »The Improvement of Mathematics Understanding Ability on System of Linear Equation Materials and Students Learning Motivation Using Geogebra-Based Educational Games.« *Al-Jabar: Jurnal Pendidikan Matematika* 12 (2): 371–384.
- Sinclair, N., in C. D. Bruce. 2015. »New Opportunities in Geometry Education at the Primary School.« *ZDM: International Journal on Mathematics Education* 47 (3): 319–329.
- Siyepu, S. 2014. »Analysis of Van Hiele's Theory in Circle Geometry: A Focus in FET Level.« *V Proceedings of the 20th Annual National Congress of the Association for Mathematics Education of South Africa: Demystifying Mathematics*, uredili M. Lebitso in A. Maclean, 61–63. Kimberley: Association for Mathematics Education of South Africa.
- Stupel, M., in D. Ben-Chaim. 2021. »From Semi-Proof to Proof: Motivating Deductive Thinking Through Inductive Exploration.« *North American GeoGebra Journal* 9 (1): 36–40.
- Sulistiowati, D. L., T. Herman in A. Jupri. 2019. »Student Difficulties in Solving Geometry Problem Based on Van Hiele Thinking Level.« *Journal of Physics: Conference Series* 1157 (4): 042118.
- Tachie, S. A. 2020. »The Challenges of South African Teachers in Teaching Euclidean Geometry.« *International Journal of Learning, Teaching and Educational Research* 19 (8): 297–312.
- Tahani, A. 2016. »Effects of Van Hiele Model in Geometric Concepts Acquisition: The Attitudes Towards Geometry and Learning Transfer Effect of the First Three Grades Students in Jordan.« *International Education Studies* 9 (4): 87–98.
- Turk, H. S., in D. Akyuz. 2016. »The Effects of Using Dynamic Geometry on Eighth Grade Students' Achievement and Attitude Towards Triangles.« *International Journal for Technology in Mathematics Education* 23 (3): 95–102.
- Ubah, I. 2022. »Pre-Service Mathematics Teachers' Semiotic Transformation of Similar Triangles: Euclidean Geometry.« *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 53 (8): 2004–2025.
- Usman, H., W. T. Yew in S. Saleh. 2019. »Effects of Van Hiele's Phase-Based Teaching Strategy and Gender on Pre-Service Mathematics Teachers' Attitude towards Geometry in Niger State, Nigeria.« *African Journal of Educational Studies in Mathematics and Sciences* 15 (1): 61–75.
- Uwurukundo, M. S., J. F. Maniraho in M. Tusiime Rwibasira. 2022. »Effect of GeoGebra Software on Secondary School Students' Achievement in 3-D Geometry.« *Education and Information Technologies* 27 (4): 5749–5765.
- Van Putten, S., S. Howie in G. Stols. 2010. »Making Euclidean Geometry Compulsory: Are We Prepared?« *Perspectives in Education* 28 (4): 22–31.
- Vargas, G. V., in R. G. Araya. 2013. »El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría.« *Uniciencia* 27 (1): 74–94.

- Wu, H. H. 1996. »The Role of Euclidean Geometry in High School.« *Journal of Mathematical Behavior* 15 (3): 221–237.
- Yilmazer, Z., in H. Keklikci. 2015. »The Effects of Teaching Geometry on the Academic Achievement by Using Puppet Method.« *Procedia: Social and Behavioral Sciences* 191:2355–2358.
- Yimer, S. T., in N. N. Feza. 2019. »Learners' Conceptual Knowledge Development and Attitudinal Change Towards Calculus Using Jigsaw Co-Operative Learning Strategy Integrated with GeoGebra.« *International Electronic Journal of Mathematics Education* 15 (1): em0554.
- Yohannes, A., in H. L. Chen. 2021. »GeoGebra in Mathematics Education: A Systematic Review of Journal Articles Published from 2010 to 2020.« *Interactive Learning Environments*. <https://doi.org/10.1080/10494820.2021.2016861>.
- Zaranis, N., in E. Synodi. 2017. »A Comparative Study on the Effectiveness of the Computer Assisted Method and the Interactionist Approach to Teaching Geometry Shapes to Young Children.« *Education and Information Technologies* 22 (4): 1377–1393.
- Ziatdinov, R., in J. R. Valles. 2022. »Synthesis of Modeling, Visualization, and Programming in GeoGebra as an Effective Approach for Teaching and Learning STEM Topics.« *Mathematics* 10 (3): 398.

The Teaching and Learning of Euclidean Geometry: Yesterday, Today, Tomorrow

Learning and teaching geometry is an important part of mathematics lessons, as it contributes to the development of formal proof and reasoning, and a better representation of reality. In the course of time, various models of teaching and learning geometry appeared, the most famous of which is the Van Hiele model, which is still used in many countries. In addition to the traditional learning and teaching of geometry, in recent decades there has been a great interest in dynamic geometry software, which has become part of geometry lessons in various schools. Although information and communication technology contributes to a better understanding of geometric concepts, the knowledge acquired by students is often short-term. For this purpose, we propose a combined way of learning and teaching geometry, which is based on three assumptions: (1) formal proof and reasoning, (2) traditional constructions with a ruler and compass, and (3) constructions with the help of information and communication technology.

Keywords: geometry, learning, Van Hiele, model, technology